提要 20：如何推求正交軌跡？

正交軌跡(Orthogonal Trajectory)係指與原曲線族相互垂直的另一組曲線，其在霸基滲流量的計算上有很重要的應用。推求正交軌跡有兩個重要原則，說明如下：

原則 1：先將曲線族 $F(x,y;C)=0$ 改寫為一階微分方程式，此一過程，需設法消除積分常數 C。為達成目的，最好將積分常數單獨放在等號之一邊：

$$f(x,y)=C \tag{1}$$

再對 x 微分，則一定可以讓積分常數 C 消失不見。設對 x 微分後之一階常微分方程式可表為：

$$\frac{dy}{dx}=g(x,y) \tag{2}$$

其中 $\frac{dy}{dx}$ 即代表在 xy 座標平面上之斜率。

原則 2：原曲線族之斜率與正交曲線族之斜率相乘等於−1。因為原曲線族與正交曲線族相互垂直，所以

$$\boxed{(\text{原曲線族的斜率})\times(\text{正交曲線族的斜率})=-1} \tag{3}$$

由式(2)知，原曲線族的斜率為 $g(x,y)$；又因原曲線族與正交曲線族係位於同一平面，故正交曲線族之斜率亦應表為 $\frac{dy}{dx}$，故式(3)可改寫為：

$$g(x,y)\frac{dy}{dx}=-1 \tag{3'}$$

故正交曲線族之斜率為：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{g(x,y)}} \tag{3''}$$

再引用一階常微分方程式的解法，即可求出正交曲線族之解。

範例一

試求圓族曲線$(x-C)^2+y^2=C^2$之正交軌跡。

【解答】

原則 1：將原曲線族改寫為一階常微分方程式，目的是要知道斜率之方程式。
原式可化簡為：

$$x^2-2Cx+C^2+y^2=C^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=2Cx$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{x}=2C$$

再對 x 作微分：

$$\frac{d\left(x+\frac{y^2}{x}\right)}{dx}=\frac{d(2C)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dx}+\frac{d\left(\frac{y^2}{x}\right)}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}y^2+\frac{1}{x}\frac{d\left(y^2\right)}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}y^2+\frac{1}{x}\frac{d\left(y^2\right)}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}\frac{y^2-x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \qquad (a)$$

上式即為原曲線族之斜率方程式。

原則 2：引用相互垂直曲線之斜率相乘為-1的想法，因為：

$$\boxed{(\text{原曲線族的斜率})\times(\text{正交曲線族的斜率}) = -1} \qquad (b)$$

又由式(a)知，原曲線族之斜率為$\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$；另外，同在 xy 平面上之正交曲線族之斜率應表為$\dfrac{dy}{dx}$，所以

$$\left(\frac{y^2-x^2}{2xy}\right)\frac{dy}{dx}=-1$$

故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \qquad (c)$$

以下為求解式(c)之解的過程。式(c)可改寫為：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \qquad (c')$$

再令

$$u(x)=\frac{y}{x} \qquad (d)$$

則式(c')可改寫為：

$$\frac{d(ux)}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}+u\frac{dx}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}-u$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\frac{2u-u+u^3}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{u}+\frac{-2u}{1+u^2}\right)\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

再對 x 作積分：

$$\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{du}{dx}dx=\int\frac{1}{x}dx+C$$

$$\Rightarrow \quad \ln u-\ln\left(1+u^2\right)=\ln x+C$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{u}{1+u^2}-\ln x=C$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{u}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}=C$$

故正交曲線族為：

$$\frac{y}{x^2+y^2}=\tilde{C} \text{ ，} \tilde{C}=e^C$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-\frac{1}{\tilde{C}}y=0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^2+\left(y-C^*\right)^2=C^{*2} \text{ ，} C^*=\frac{1}{2\tilde{C}}}$$

由以上可知，正交曲線族之曲線亦為圓族曲線。

習題

1. Find the orthogonal trajectories of the following curve $(x-C)^2+y^2=C^2$.【87 交大土木所 15%，94 北科製造所 20%】

2. Find the orthogonal trajectories of $x=y+1+Ce^y$.【94 中興精密所 15%】

3. Find the family of orthogonal trajectories of $y^2-x^2=C^2$.【94 中興生機所 10%】

4. Find the family of orthogonal trajectories for the curves $F(x,y,k)=2x^2-3y=k$.【87 雲科電機所 10%】

5. Find the orthogonal trajectories of the curves: $y=\sqrt{x+C}$, where C is a constant.【91 台大工程科學所 15%】

6. 物理學指出電力線與其等電位線互為正交曲線，今有等強度之兩異號點電荷分別位於 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$，實驗證實此兩電荷在其周遭所建立之電場電力線方程式為 $x^2+(y-C)^2=1+C^2$（C 為常數）。試求其等電位線曲線之方程式。【87 北科材料所 20%】

7. 請問曲線組 $y=4x+1+C_1e^{4x}$ 通過點 $(0,0)$ 的正交軌線（orthogonal trajectory）為何？【91 中央環工所 20%】

8. The general solution of a differential equation defines the family of all lines which touch the parabola $y=x^2+1$.
   (a) Find the required differential equation.
   (b) Describe the differential equation by giving its order and telling whether it is ordinary or partial and linear or nonlinear.
   (c) Find the particular solutions which include the origin (0,0).
   (d) Verify that the given parabola is a singular solution of the required differential equation.
   (e) In the x-y plane plot the lines and the parabola described by the particular and the singular solutions.【90 高科電控所 20%】