

提要 19：解一階 ODE 的第十二個方法--作圖法

一階常微分方程式一定可以表為

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

在幾何意義上， y' 代表斜率，由式(1)知，只要能夠知道在 xy 平面上點 (x, y) 之座標，則 y' 即可計算出來，亦即 xy 平面上，通過點 (x, y) 之曲線的斜率可以計算出來。另外，曲線上任意點 (x, y) 之曲線走向即為斜率方向，故只要能夠找出平面上代表性座標點之斜率，再以『短斜線』代表通過該點之斜率，最後應可繪出問題之解所代表的曲線圖。

範例一

試繪製 $y' = xy$ 之幾何圖形。

【解答】

茲選取 16 點作分析。

x	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
y	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
y'	1	2	3	4	2	4	6	8	3	6	9	12	4	8	12	16

以此方式做出 xy 平面上之短斜線，最後再連接短斜線，即可繪出如以下所示之圖形來。

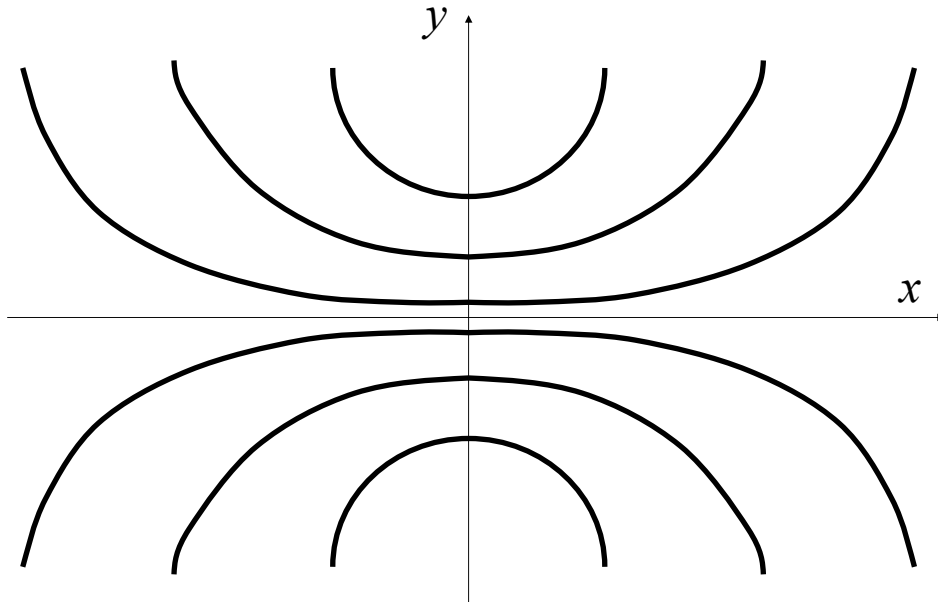


圖 1 $y' = xy$ 之幾何圖形。

習題

1. Find the integral curves of the equation $y' + 4y = 3e^{2x}y^2$. 【93 交大交研所】
2. Solve $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y$. 【94 中興環工所 5%】
3. Solve $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{y^2}{x}$. 【90 北科化工所 20%】