單元 18　複變函數總整理

18-1　複數的基本概念

【例題 1】

試求 $z^5=-32$ 的所有根。【台大土研所】

【參考解答】$\because -32=2^5\cdot e^{i\pi}$，$\therefore$ 五個根為 $z=2\cdot e^{i\cdot\frac{2k\pi+\pi}{5}}$, $k=0,1,2,\cdots$。

【例題 2】

Express all values of the following complex numbers in the form of $a+bi$, where a and b are real. (1) $(2i)^{3i}$ (2) $(1+i)^{1-i}$【交大電信所】

【參考解答】

$$(1)\ (2i)^{3i}=e^{-3(2k\pi+\frac{\pi}{2})}[\cos(3\ln 2)+i\sin(3\ln 2)],\ k=0,1,2,\cdots$$

$$(2)\ (1+i)^{1-i}=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}[\cos(2k\pi+\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(2k\pi+\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})]$$

18-2　複變函數

【例題 1】

証明 $z=\pm i$ 為函數 $f(z)=\sqrt{z^2+1}$ 的分支點。【交大光電所】

【參考解答】$f(z)=(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$, $f(z)=r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$，$\therefore z=i$ 為一分支點，$z=-i$ 為另一分支點。

【例題 2】

求 $(1+i)^{1-i}$ 的主值。【交大光電所】

【參考解答】主值 $=e^{(1-i)(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})}$

18-3　複數微分與柯西里曼方程式

【例題 1】

Given that $f(z)=z^2+iz=u(x,y)+iv(x,y)$ in the complex plane.
(1) Find u and v.
(2) Determine whether the Cauchy Riemann equations hold or not.【台科大電研所】

【參考解答】(1) $u(x,y)=x^2-y^2+y, v(x,y)=2xy-x$
(2) Cauchy Riemann equations is hold

【例題 2】
A complex function $f(z)$ is called entire if $f(z)$ is analytic for all z in complex plane. Determine which of the following complex functions is entire?【中央電研所】

(1) $f(z)=\text{Re}(z^2)$ (2) $f(z)=z-\overline{z}$ (3) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ (4) $f(z)=e^z$

【參考解答】(1) $\text{Re}(z^2)$ 不是全函數
(2) $z-\overline{z}$ 不可解析，故不是全函數
(3) $\therefore z+\dfrac{1}{z}$ 不可解析，故不是全函數
(4) e^z 是全函數

【例題 3】
決定下列各函數奇點的位置及種類：

(1) $e^{\frac{1}{z}}$ (2) $\sin\dfrac{1}{z}$ (3) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ (4) $\dfrac{\sin z}{z}$ 【清大動機所】

【參考解答】(1) $z=0$ 為 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇異點
(2) $z=0$ 為 $\sin\dfrac{1}{z}$ 的本性奇異點
(3) $z=\dfrac{1}{n\pi}$ 為 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的單極點(一階極點)
(4) $z=0$ 為 $\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去除的奇異點

18-4 柯西積分定理與積分公式

【例題 1】

計算 $\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}dz$，其中 $z=x+iy$，C 為單位圓，逆時鐘。【交大土研所丁組】

【參考解答】$\oint_C \frac{7z-6}{z^2-2z}dz = 6\pi i$

【例題 2】

(1) State the Cauchy integral formula and the Laurent expansion theorem.

(2) Find all the possible Laurent series about $z=0$ for the complex-valued function $f(z)=\frac{1}{1-z}(z=x+iy)$, by using the Laurent expansion theorem only.【台大土研所】

【參考解答】(1) $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}du, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

(2) $f(z)=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$

18-5　無窮級數與勞倫茲級數

【例題 1】

Expand $f(z)$ in a Laurent series valid for $1<|z|<3$, where

$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$.【成大土研所結構組】

【參考解答】

(1) 若 $|z|>1$, $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots$

(2) 若 $|z|<3$, $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{3}(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\cdots)$

(3) 若 $1<|z|<3$，$\frac{1}{z+1}=\cdots-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{54}+\frac{z^3}{162}-\cdots$

18-6　留數定理與積分計算

【例題 1】

If $f(z)=\dfrac{z^8+1}{z^3(z^2+2)(2z^2+1)}$, find the residue of $f(z)$ at $z=0$.【中山機械所】

【參考解答】$\operatorname{Res}(z=0)=a_{-1}=-\dfrac{5}{4}$

【例題 2】

求 $\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ 之留數。【北科大土研所】

【參考解答】$\begin{cases} \operatorname{Res}(z=i)=\dfrac{e^{-1}}{2i} \\ \operatorname{Res}(z=-i)=-\dfrac{e}{2i} \end{cases}$

【例題 3】

Determine the order of each pole and the residue of the function $f(z)=\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$.【成大機械所】

【參考解答】$z=0$ 為三階極點，$\therefore \operatorname{Res}(z=0)=-\dfrac{4}{3}$。

【例題 4】

Evaluate $\oint_C \sin z[\dfrac{1}{z-5}+\dfrac{1}{(z-5)^2}]dz$, where C is any simple closed path enclosing $z=5$.【北科大電研所】

【參考解答】$\operatorname{Res}(z=5)=\sin 5+\cos 5$

【例題 5】

Evaluate $\oint_C \dfrac{z^2}{2z-1}dz,\ C:|z|=1$.【成大土研所甲組】

【參考解答】$\oint_C \dfrac{z^2}{2z-1}dz=\dfrac{\pi}{2}i$

【例題 6】

$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$【交大土研所】

【參考解答】$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = \frac{\pi}{8}$

【例題 7】

(1) Find the roots of $1+z^4=0$ and the sum of the residues of $\frac{\exp(iz)}{1+z^4}$ in the upper half plane only.

(2) Evaluate the integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}dx$ by the contour integral and the Cauchy integral theorem.【91 台大土研所】

【參考解答】

(1) The sum of the residues equal to

$$\mathrm{Res}(z=e^{i\frac{\pi}{4}})+\mathrm{Res}(z=e^{i\frac{3\pi}{4}})=-\frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4}(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}}{2})i$$

(2) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}\pi e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{4}(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}}{2})$

【例題 8】

Evaluate $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.【89 中興土研所丙組】

【參考解答】$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$