

單元 14 多值函數瑕積分

【例題 1】

Evaluate $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$. 【91 中原土木】

【參考解答】 令 $t = x^3$, $x = t^{\frac{1}{3}}$, $dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{2/3}(1+t)} dt .$$

【例題 2】

Please find the following integral result $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$, $0 < a < 1$.

【90 北科機電】

【參考解答】 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}$

【例題 3】

求下列積分解 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)^2} dx$. 【91 彰師光電】

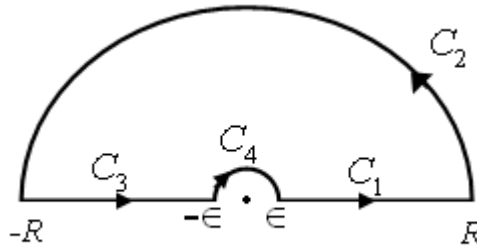
【參考解答】 $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{r} \ln r}{(r+1)^2} dr = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)^2} dx = \pi$

【例題 4】

求下列積分值 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1-e^x} dx$, $0 < p < 1$. 【91 彰師光電】

【參考解答】 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1-e^x} dx = \pi \cot p\pi$

【例題 5】



Find $\int_0^{\infty} \frac{2 \log x}{(x^2 + 1)^2} dx$. 【91 中興土木】

【參考解答】 on $C_1, z = re^{i0}, \int_{C_1} \frac{2 \ln z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_{C_1} \frac{2 \ln r}{(r^2 + 1)^2} dr$

on $C_2, z = re^{i\theta}, R \rightarrow \infty, \int_{C_2} \frac{2 \ln z}{(z^2 + 1)^2} dz = 0$

on $C_3, z = re^{i0}, \int_{C_3} \frac{2 \ln z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_0^{\infty} \frac{2 \ln r}{(r^2 + 1)^2} dr + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{1}{(r^2 + 1)^2} dr$

on $C_4, z = \epsilon e^{i\theta}, \epsilon \rightarrow 0, \int_{C_4} \frac{2 \ln z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_{\pi}^0 \frac{2 \ln \epsilon e^{i\theta}}{(\epsilon^2 e^{i2\theta} + 1)^2} dr \epsilon e^{i\theta} d\theta = 0$

【例題 6】

求 $\int_0^{\infty} \cos x^3 dx$ 。 (Assume $\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = A_n$.) 【成大電機】

【參考解答】 $\int_0^{\infty} \cos x^n dx = \cos \frac{\pi}{2n} A_n, \int_0^{\infty} \cos x^3 dx = \cos \frac{\pi}{6} A_3$

【例題 7】

Find the Fourier transform of the following function:

$f(t) = e^{i\pi t^2}, t \in (-\infty, \infty)$, where i is the imaginary. 【90 中山光電】

【參考解答】 $F[e^{-i\pi x^2}] = \cos\left(\frac{w^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{w^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4}\right)$