

單元 11 三角函數定積分

【例題 1】

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$. 【91 暨南土木】

$$\text{【參考解答】 } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}$$

【例題 2】

Find $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lambda + \cos\theta}$, $\lambda > 1$. 【90 清大物理】

$$\text{【參考解答】 } I = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

【例題 3】

By residue, solve $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k + \cos^2\theta} d\theta$, $k > 0$. 【91 交大物理】

$$\text{【參考解答】 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k + \cos^2\theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{(2k+1)^2 - 1}}$$

【例題 4】

Find $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \sin\theta} d\theta$, $0 < \alpha < 1$. 【91 海洋光電】

$$\text{【參考解答】 } \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \sin\theta} d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

【例題 5】

Evaluate the following integral $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin\theta}{3 + \cos\theta} d\theta$. 【91 成大造船】

$$\text{【參考解答】 } \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin\theta}{3 + \cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

【例題 6】

Evaluate the following integral $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$. 【91 中央機械】

【參考解答】 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{6}$

【例題 7】

Evaluate $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta} d\theta$. (Hint: Residue theorem might be used.) 【90 中原機械】

【參考解答】 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2\theta} d\theta = \pi$

【例題 8】

Evaluate the integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta$. 【91 中央光電】

【參考解答】 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2} d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

【例題 9】

Compute $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta$. 【89 中興物理】

【參考解答】 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 2\pi(2-\sqrt{3})$