## 提要 18：解一階 ODE 的第十一個方法--Picard 循環積分方法

這個方法僅適用於初始值問題(Initial Value Problem)，亦即微分方程之問題一定要給定初始條件 $y(x)=y_0$，否則無法引用此法求解。若已知初始問題爲：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\text{，}\ y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

以下分爲數個步驟說明 Picard 循環積分方法的應用。

步驟 1：本來式(1)中之等號右邊的函數 $f(x,y)$ 裏面與變數 $y$ 相關的項次應移到等號左邊之後，才能對變數 $x$ 作積分。但是若將 $f(x,y)$ 中之變數 $y$ 安排爲固定值，則可直接對式(1)中之變數 $x$ 作積分，但是所求出之解僅爲近似值。Picard 發現若將初始條件 $y(x_0)=y_0$ 代入式(1)等號右邊函數 $f(x,y)$ 中之 $y$，則符合之前的想法，亦即：

$$\frac{dy}{dx}\cong f(x,y_0)$$

上式再對 $x$ 作定積分：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{dx}dx\cong\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx$$

$$\Rightarrow\quad y(x)\Big|_{x_0}^{x}\cong\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx$$

$$\Rightarrow\quad y(x)-y(x_0)\cong\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx$$

因此 $y(x)$ 可得：

$$y(x)\cong y(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx \tag{2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{y(x)\cong y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx} \tag{2'}$$

步驟 2：再令剛才所求出之 $y(x)$ 的近似解，假設爲 $y_1$，亦即：

$$y_1=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)dx$$

再將 $y_1$ 代回式(1)，故式(1)應改寫爲約等於的關係：

$$\frac{dy}{dx}\cong f(x,y_1)$$

再對 $x$ 變數作 $x_0$ 到 $x$ 的定積分：

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{dx}dx\cong\int_{x_0}^{x}f(x,y_1)dx$$

$$\Rightarrow \quad y(x)\Big|_{x_0}^{x} \cong \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y(x) - y(x_0) \cong \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

故

$$y(x) \cong y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) \cong y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx} \tag{3'}$$

**步驟 3**：令剛才步驟 2 所求出之近似解爲 $y_2$，即：

$$y_2 = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

再將 $y_2$ 代回式(1)，則：

$$\frac{dy}{dx} \cong f(x, y_2)$$

然後再對 $x$ 變數作 $x_0$ 到 $x$ 的定積分：

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{dx}\,dx \cong \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y(x)\Big|_{x_0}^{x} \cong \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad y(x) - y(x_0) \cong \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

故

$$y(x) \cong y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) \cong y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx} \tag{4'}$$

註：

1. 理論上這個循環積分的方法需進行無限多次的積分，所求出之解才會與真正的解相同。
2. 一般而言，僅需進行三次的循環積分，即可求出相當好的結果。除非出題目的老師有特別交待，否則僅需進行三次的循環積分即可。
3. 公式絕對不要去背它，而應理解 Picard 的想法。很多準備考試的讀者們背公式時，常誤認公式(3)爲：

$$y(x) \cong y_1 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx$$

或將公式(4)誤認為：

$$y(x) \cong y_2 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx$$

以上請讀者務須謹慎留意。

| 範例一 |
| --- |
| 試求 $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$，$y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 之特解。 |

**【解答】**

$\boxed{\text{步驟 1}}$：將初始條件 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 代入原微分方程式，則：

$$\frac{dy}{dx}\cong 1+y(0)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\cong 1+\frac{\pi^2}{16}$$

再對變數 $x$ 作 0 至 $x$ 的定積分：

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}dx \cong \int_0^x \left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)dx$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\Big|_0^x \cong \left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x\Big|_0^x$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)-y(0)\cong \left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\cong y(0)+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\cong \frac{\pi}{4}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x \qquad (a)$$

$\boxed{\text{步驟 2}}$：將上式$(a)$中所示之 $y$ 的近似解當作 $y_1$，再將 $y_1$ 代回原微分方程式等號右邊之變數 $y$，亦即：

$$\frac{dy}{dx}\cong 1+y_1^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\cong 1+\left[\frac{\pi}{4}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x\right]^2$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx}\cong 1+\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2$$

再對變數 $x$ 作 0 至 $x$ 的定積分：

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}dx \cong \int_0^x \left[1+\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad y(x)\Big|_0^x \cong \left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3\Bigg|_0^x$$

$$\Rightarrow \quad y(x)-y(0) \cong \left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3$$

$$\Rightarrow \quad y(x) \cong y(0)+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3$$

$$\Rightarrow \quad y(x) \cong \frac{\pi}{4}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3 \qquad (b)$$

$\boxed{\text{步驟 3}}$：將上式($b$)中所示之 $y$ 的近似解當作 $y_2$，再將 $y_2$ 代回原微分方程式等號右邊之變數 $y$，亦即：

$$\frac{dy}{dx} \cong 1+y_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \cong 1+\left[\frac{\pi}{4}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3\right]^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \cong 1+\frac{\pi^2}{16}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^2+\frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^4+\frac{1}{9}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^6$$
$$+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi^2}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3$$
$$+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^3+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^4+\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2x^5$$

再對變數 $x$ 作 0 至 $x$ 的定積分：

$$\int_0^x \frac{dy}{dx}dx \cong \int_0^x \left\{1+\frac{\pi^2}{16}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^2+\frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^4+\frac{1}{9}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^6\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi^2}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3$$

$$\left.+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^3+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^4+\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^5\right\}dx$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\big|_0^x \cong \left\{1+\frac{\pi^2}{16}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^2+\frac{\pi^2}{16}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^4+\frac{1}{9}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^6\right.$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi^2}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3$$

$$\left.\left.+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^3+\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^4+\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^5\right\}\right|_0^x$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)-y(0)\cong\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^3+\frac{\pi^2}{80}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^5+\frac{1}{63}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^7$$

$$+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\frac{\pi^2}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^3+\frac{\pi}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^4$$

$$+\frac{\pi}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^4+\frac{2}{15}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^5+\frac{\pi}{72}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^6$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\cong y(0)+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2+\frac{\pi^2}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)\right]x^3$$

$$+\left[\frac{\pi}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)+\frac{\pi}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2\right]x^4+\left[\frac{\pi^2}{80}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2+\frac{2}{15}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2\right]x^5$$

$$+\frac{\pi}{72}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^6+\frac{1}{63}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^7$$

$$\Longrightarrow \quad y(x)\cong\frac{\pi}{4}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x+\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)x^2+\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2+\frac{\pi^2}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)\right]x^3$$

$$+\left[\frac{\pi}{24}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)+\frac{\pi}{8}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2\right]x^4+\left[\frac{\pi^2}{80}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2+\frac{2}{15}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2\right]x^5$$

$$+\frac{\pi}{72}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^6+\frac{1}{63}\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^2 x^7 \qquad (c)$$

式($c$)之近似解即可代表問題之特解。

註：

1. 例題 1 之正確解亦可求出。茲將原微分方程式改寫為：

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}=1$$

再對變數 $x$ 作積分：

$$\int \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}dx=\int dx+C$$

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy=x+C$$

$$\tan^{-1} y=x+C$$

即問題之通解為：

$$y=\tan(x+C)$$

再代入初始條件 $y(0)=\frac{\pi}{4}$ 求特解：

$$\frac{\pi}{4}=\tan(0+C)$$

$$C=\frac{\pi}{4}$$

故滿足初始條件之特解可表為：

$$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

已知 $\tan u$ 之 Taylor 級數為：

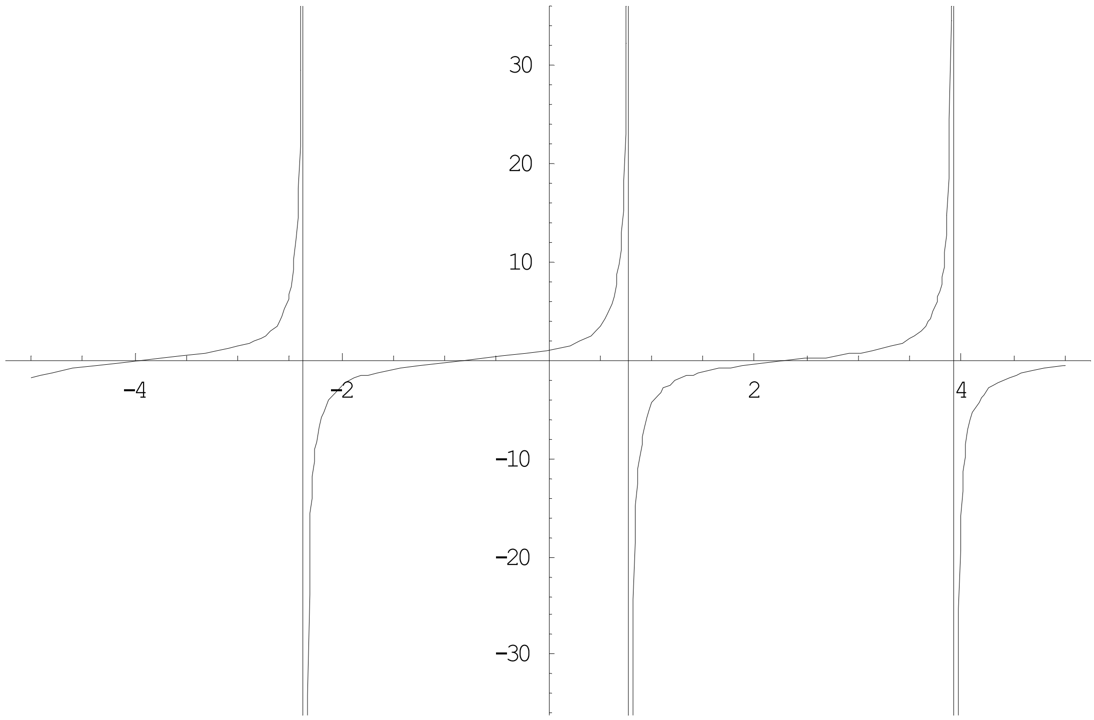
$$\tan u=u+\frac{1}{3}u^3+\frac{2}{15}u^5+\frac{17}{315}u^7+\cdots$$

故 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 改寫為：

$$y=\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{2}{15}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^5+\frac{17}{315}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^7+\cdots$$

上式展開後之 $x^6$ 以前的項次，應會與式($c$)相同。

2. 若以 Mathematica 繪圖，需先輸入 $Plot[\,Tan[x+\frac{\pi}{4}],\{x,-5,5\}]$，後按 Shift+Enter 鍵，即可得出問題之特解的圖形，如以下所示：



(水平軸爲 $x$ 軸，垂直軸爲 $y$ 軸)

## 習題

1. Find the general solution of $x^2y+y^3+xy^2y'=0$, $y(1)=1$.【94 台科電子所 10%】

2. Solve $\dfrac{dx}{dt}=-x-x^3$, $x(0)=k>0$.【94 高應電機所 10%】

3. Solve $y'+\dfrac{y}{x}=(\ln x)y^2$, $y(1)=1$.【87 成大造船所 13%】

4. Solve $y'=y\cosh x$, $y(0)=1$.【91 清大電機所 5%】