

單元 8 泰勒級數

【例題 1】

Expand $\frac{1}{1+z}$ in a Taylor series centered at $-2i$ and determine the radius of convergence. 【88 成大工程科學】

$$\text{【參考解答】 } f(z) = \frac{1}{1-2i} - \frac{1}{(1-2i)^2}(z+2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z+2i)^2 - \dots, \\ |z+2i| < \sqrt{5}$$

【例題 2】

Find a power series representation of $\cosh x$. 【88 成大電機】

$$\text{【參考解答】 } \cosh x = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots, |x| < \infty$$

【例題 3】

試求 $\tan(z)$ 之馬克勞林級數(Maclaurin series). 【88 雲科環安】

$$\text{【參考解答】 } f(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \dots, |z| < \frac{\pi}{2}$$

【例題 4】

判斷下列級數之斂散性：(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ 【89 中山光電】

$$\text{【參考解答】 (1) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{e} < 1, \text{ 原級數收斂。}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 3 > 1, \text{ 原級數發散。}$$