單元 4　解析函數的特性

【例題 1】

Given $u(x,y)=2x^2-y^2$, can you find a real-valued function $v(x,y)$ such that $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, where $z=x+iy$, is analytic on C?【90 交大電控】

【參考解答】$\because \nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\neq 0$ $\therefore$ 不存在 v 使得 $f(z)=u+iv$ 為解析

【例題 2】

If $f(z)=\sqrt{3}re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\mathrm{Re}(z)+re^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})}\mathrm{Im}(z)$, $z=x+iy=re^{i\theta}$, find all points for which $f(z)$ is differentiable.【90 暨南電機】

【參考解答】$f(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}iz^2+\frac{\sqrt{3}}{2}iz\overline{z}+\frac{1}{2}z\overline{z}-\frac{1}{2}\overline{z}^2$，只在直線 $x+\sqrt{3}y=0$ 上任意點處可微分，其餘各處 $f(z)$ 不可微分，也不可解析。

【例題 3】

Discuss the differentiability of the complex function $f(z)=e^x e^{-iy}$.【90 中正電機】

【參考解答】因為 $f(z)=e^{x-iy}=e^{\overline{z}}$，$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=e^{\overline{z}}\neq 0$，所以在複數平面上的每一點皆不可微分。

【例題 4】

複數 z 可表示為 $z=x+iy$，其中 $i=\sqrt{-1}$，若 z 的共軛複數(complex conjugate)是 $\overline{z}$，請分別判定下列函數是否解析函數(analytic Function)？

(1) $f(z)=\overline{e}$　(2) $f(z)=z\,\overline{z}$　(3) $f(z)=z^3$【89 成大航太】

【參考解答】(1)因為 $f(z)=\overline{e}$，且 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$，所以 f(z)可解析，即每一

點都可微分。

(2)因為 $f(z)=z\bar{z}$，$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=z=0$，故只在點 $z=0$ 可微分，其餘各處不可微分。

(3)因為 $f(z)=z^3$，$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$，所以 $f(z)$可解析，即每一點都可微分。

【例題 5】

已知 harmonic function $u(x,y)=\cosh x\cos y$，求解析函數 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。【90 中興土木】

【參考解答】$f'(z)=u_x-iu_y$，$f'(x+iy)=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$，取 $y=0$、$x=z$、$f'(z)=\sinh z$，$f(z)=\cosh z+ic$, c is real.

【例題 6】

Find an analytic function $f(z)=u+iv$ for $v=xy(x^2-y^2)$.【89 成大土木】

【參考解答】$u=\dfrac{1}{4}(x^4-6x^2y^2+y^4)+c$

【例題 7】

Find the number of roots of the equation $z^8-5z^5+z^2-1=0$ of absolute value less than 1.【91 清大電機】

【參考解答】$z^8-5z^5+z^2-1=0$ 在$|z|=1$內有 5 個根。

【例題 8】

Show that all roots of the equation $z^7-2z^3+8=0$ satisfy $1<|z|<2$.
Hint: Use Rouche's theorem.【91 交大電信】

【參考解答】$z^7-2z^3+8=0$ 共有 7 個根，故 $z^7-2z^3+8=0$ 所有根皆在$1<|z|<2$內。

【例題 9】

Find the minimum value of $\left|e^{1-2z}\right|$ on the region $|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\le 4$.
【88 交大電信】
【參考解答】$\left|e^{1-2z}\right|$之極小值為$e^{1-8}=e^{-7}$，$\left|e^{1-2z}\right|$之極大值為e^{9}。

【例題 10】
$f(z)=(z+1)^2$, D is the triangular region with vertices at $z=0,2,i$, find the points in D where $|f(z)|$ has its maximum and minimum value.【清大電機】
【參考解答】$z=2$時$|f(z)|$之極大值為 9；$z=0$時，$|f(z)|$之極小值為 1。