單元 3　函數的極限、連續、微分與解析

【例題 1】

Find the limit of $\dfrac{z^2}{|z^2|}$ as z approaches zero.【台大材料】

【參考解答】$\because$ 不同斜率 m 逼近時，其極限值均不相同，$\therefore \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z^2}{|z^2|}$ 不存在。

【例題 2】

Find the all possible values of $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}$.【台科電子】

【參考解答】當 $m\to\pm\infty$，$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}=-1$；

當 $m=0$，$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}=1$；

其他情況下 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{1-im}{1+im}$，故本題極限值不存在。

【例題 3】

Find the limit of $\lim\limits_{x\to 1+i}[x+i(x+2y)]$, $z=x+iy$.【交大控制】

【參考解答】$\lim\limits_{x\to 1+i}[x+i(x+2y)]=1+3i$

【例題 4】

Find the point for which $f(z)$ is differentiable and the points for which $f(z)$ is analytic.

(1) $f(z)=\mathrm{Im}(z)$　　(2) $f(z)=|z|^2$

(3) $f(z)=x^2+y^2+i2xy$　　(4) $f(z)=z+z^2$

【90 交大電控、90 暨南電機】

【參考解答】(1) 已知 $\dfrac{d}{dz}\mathrm{Im}(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\mathrm{Im}(z+\Delta z)-\mathrm{Im}(z)}{\Delta z}$，取 $\Delta y=m\Delta x$，

則$\frac{d\,\mathrm{Im}(z)}{dz}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m\Delta x}{\Delta x+im\Delta x}=\frac{m}{1+im}$。

(2)當$x=0$、$y=0$，其極限值與斜率m無關，所以可微分。在其餘的點，極限值皆與m有關，所以不可微分。故$|z|^2$只在$z=0$點可微分，其餘的點皆不可微分，亦沒有解析之區域，即使在點$z=0$，$f(z)$亦不解析。

(3)在直線$y=0$上之任意點，極限值與m無關，故極限值存在；$f(z)$可微分，微分結果為$f'(z)=2x$；在其餘的點，$f(z)$都不可微分；在任意區域，$f(z)$不解析。

(4)$\frac{d}{dz}(z+z^2)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)+(z+\Delta z)^2-(z+z^2)}{\Delta z}=1+2z$

，故$z+z^2$在任何點皆可微分，在任何區域皆可解析。

【例題 5】

Consider $f(z)=|z|^2$

(1) Do you think $f(z)$ is continuous throughout the entire complex plane?

(2) Find the derivative of $\frac{df(z)}{dz}$.

(3) Find the point at which $f(z)$ will be analytic.【90 元智電機控制組、91 中正電機】

【參考解答】(1) $f(z)$ is continuous throughout the entire complex plane.

(2) $f'(z)=u_x+iv_x=2x=z+\bar{z}$

(3) $f(z)$在任意點皆不可解析

【例題 6】

Let $f(z)$ and $g(z)$ be two complex-valued functions. Prove that

(1) If f and g are differentiable at z_0, then $f+g$ is differentiable at z_0.

(2) If f and g are analytic at z_0, then $f+g$ is analytic at z_0.【91 交大電控】

【參考解答】(1)$\frac{d(f+g)}{dz}=f'(z_0)+g'(z_0)$，$\therefore f+g$在點$z_0$可微分。

(2)由(1)可知，在 f 和 g 可微分的點上，$f+g$ 亦可微分，當 f 和 g 在點 z_0 解析，代表 f 和 g 在點 z_0 附近皆存在可微分之區域。

【例題 7】

Discuss the differentiability of the following functions:

(1) A function with real variable $f(x)=|x|, x\in R$ (real numbers).

(2) A function with complex variable $f(z)=|z|, z\in C$ (complex numbers). (Must explain the reasons!)【90 交大電控光電】

【參考解答】(1)因為 $f'(0^+)\neq f'(0^-)$，故 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可微分。

(2) $f(z)=|z|=r=u+ir$，即 $u=r$，$v=0$，代入 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，因為 $1=\frac{1}{r}\cdot 0=0$ 不成立，故 $f(z)=|z|$ 在複數平面上的每一點都不可微分。

【例題 8】

$f(z)=x^2+y^2+i2xy$, find points for which $f(z)$ is analytic, and the points for which $f(z)$ is differentiable.【90 暨南電機】

【參考解答】$f(z)$ 只在直線 $y=0$ 上的每一點可微分，其餘各處均不可微，且不可解析。

【例題 9】

$z=x+iy=re^{i\theta}$. If $f(z)=\sqrt{3}re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\mathrm{Re}(z)+re^{-i(\theta-\frac{\pi}{2})}\mathrm{Im}(z)$, find all points for which $f(z)$ is differentiable.【90 暨南電機】

【參考解答】僅在直線 $x=-\sqrt{3}y$ 上的每一點可微分，其餘各處 $f(z)$ 均不可微分，也不可解析。

【例題 10】

A complex function $f(z)$ is said to be analytic in a domain D if $f(z)$ is defined and differentiable at all points of D. Find the most general analytic function $f(z)$ whose real part is x^2-y^2-x where $z=x+iy$ with i being the imaginary unit, i.e., $i=\sqrt{-1}$, and x, y both real. 【91 中

央電機】

【參考解答】 $f(z)=u+iv=(x^2-y^2-x)+i(2xy-y+c)$；

$f(z)=z^2-z+ic$。

【例題 11】

Let $v=2x-x^3+3xy^2$, find u, such that $f(z)=u+iv$ is analytic. 【90 暨南電機】

【參考解答】 $f(z)=2iz-iz^3+c$

【例題 12】

Let $f(z)=\cos\bar{z}$, where $z=x+iy, \bar{z}=x-iy$.

(1) Is $f(z)$ continuous everywhere in the xy plane?

(2) Does it possess a derivative with respect to z everywhere in the xy plane? If it possess a derivative with respect to z, find it. 【88 中央光電】

【參考解答】(1) $f(z)=\cos\bar{z}$ is everywhere continuous.

(2) $\dfrac{df}{dz}=-\sin x\cosh y+i\cos x\sinh iy=-\sin\bar{z}$

【例題 13】

Suppose that $f(z)=u+iv$ is analytic and that $g(z)=v+iu$ is also analytic, show that u and v must both be constants. (Hint: $\pm if(z)$ is analytic.)【89 交大電信】

【參考解答】得 $u=$ constant，$u=c_1$；同理 $v=$ constant，$v=c_2$，故得證。

【例題 14】

Determine all points (if any) at which the complex function $f(z)$ is differentiable. Given $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$. 【91 海洋電機】

【參考解答】 $f'(z)=\dfrac{(z+i)-(z-i)}{(z+i)^2}=\dfrac{2i}{(z+i)^2}$

【例題 15】

Find all the isolated singularities of $f(z)=\dfrac{z(z-\pi)^2}{\sin^2 z}e^{1/(z-1)}$. In the case of a pole, state the order of the pole.【91 交大光電】

【參考解答】$z=0$ 為一階極點，$z=\pi$ 為可棄奇異點，$z=1$ 為本性奇異點，$z=mx, m=-1,\pm 2,\pm 3,\cdots$ 為二階極點。