單元 1　複變數與函數

【例題 1】

Let $W_N^{kn} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, calculate $\sum_{k=1}^{N} W_N^{kn}$.【88 台科電機】

【參考解答】若 n 為整數，則 $\sum_{k=1}^{N} W_N^{kn} = 0$。

【例題 2】

Evaluate in closed from the sum $f(\theta) = 1 + a\cos\theta + a^2\cos 2\theta + \cdots$, $|a| < 1$.【88 清大物理】

【參考解答】$f(\theta) = \mathrm{Re}[1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{i2\theta} + \ldots\ldots] = \dfrac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$

【例題 3】

Determine the all cube roots of 27.【91 交大電機】

【參考解答】$w = 27^{\frac{1}{3}} = 3e^{i\frac{1}{3}2k\pi}$，$k = 0,1,2$，亦即 $w_1 = 3$，$w_2 = 3e^{1\frac{2}{3}\pi}$，$w_3 = 3e^{1\frac{4}{3}\pi}$。

【例題 4】

Find three cube roots of $z = i$.【90 海洋輪機】

【參考解答】$z = i^{\frac{1}{3}} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$，$k = 0,1,2$，亦即 $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$，$z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$，$z_3 = e^{i\frac{3}{2}\pi}$.

【例題 5】

Find the four roots of $1 - i$.【90 海洋電機】

【參考解答】$k = 0, z_1 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$；$k = 1, z_2 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{7}{16}\pi}$；$k = 2, z_3 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{15}{16}\pi}$；$k = 3, z_4 = 2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{23}{16}\pi}$。

【例題 6】

(1) 求 $z=-3-3i$ 之 Arg z (principal argument of z)。

(2) 解 $z^2-(5+i)z+8+i=0$ 。【90 中興土木】

【參考解答】(1)因為 $z=3\sqrt{2}e^{-i(\frac{3}{4}\pi+2k\pi)}$，則 $Arg(z)=-\frac{3}{4}\pi$ 。

$$(2)\ z=\frac{1}{2}[(5+i)\pm(1+3i)]=3+2i\text{ 、 }2-i\text{ 。}$$

【例題 7】

If z is a complex number, $z^6=1, z\neq 1$, find the following values. (1) $|z|$

(2) z^3 (3) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5$.【90 逢甲紡織】

【參考解答】(1) $|z|=1$ ；(2) $z^3=\pm 1$ ；

(3) $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5=\dfrac{1-z^6}{1-z}=0$ 。

【例題 8】

(1) Transform $x=3.303303303303\cdots$ into a quotient (i.e., a real number divided by another real number).

(2) For any complex z, $z^2=|z|^2$, true or false? Why?

(3) For any complex z and its conjugate $\bar{z}$, $|z|^2=z\bar{z}$. True or false? Why?

【參考解答】(1) $100x=330.330330\cdots, 100x=330+0.33033\cdots, x=\dfrac{3300}{999}$.

(2) False, $|z|^2=z\cdot\bar{z}=x^2+y^2, z^2=(x+iy)\neq|z|^2$.

(3) True, $|z|^2=z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$.

【例題 9】

Find the general solution of $e^{\bar{z}}=i$.【90 海洋電機】

【參考解答】$e^{\bar{z}}=e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=i, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ ，

$$\bar{z}=i(\frac{\pi}{2}+2k\pi), z=-i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\text{ 。}$$

【例題 10】

For a complex number $z = x + iy$ is $|\cos z| \le 1$? Why?【91 清大動機】

【參考解答】If z is real, $|\cos z| \le 1$; If z is imaginary, $|\cos z| \ge 1$.

【例題 11】

If $\cos(\frac{\pi}{3} - i\ln 3) = a + ib$, find a, b.【91 中山光電】

【參考解答】因為 $\cos(\frac{\pi}{3} - i\ln 3) = \frac{5}{6} + i\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $a = \frac{5}{6}$、$b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$。

【例題 12】

(1) $\cos(\pi + i) = ?$ (Express your solution in the form of $x + iy, x, y \in R$.)

(2) Solve the equation $\cos z = 2$ for z. (Express z in the form of $x + iy, x, y \in R$.)【91 交大電控】

【參考解答】(1) $\cos(\pi + i) = \cos\pi\cos i - \sin\pi\sin i = \cos\pi\cosh 1 = -\cosh 1$

(2) $\cos z = 2, \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}] = 2$，同乘 e^{iz}，

$z = \frac{1}{2}\ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。

【例題 13】

If $\cos z = 2$, what is $\cos 3z$.【89 交大機械】

【參考解答】$\cos 3z = 26$

【例題 14】

Let z_1, z_2 and z be complex numbers and $i = \sqrt{-1}$. Please show that

(1) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

(2) $\sinh(iz_1) = i\sin(z_1)$.

(3) $\cosh(iz_1) = \cos(z_1)$.

(4) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$.

(5) $\sinh z = \sinh(x + iy) = \sin x\cos y + i\cosh x\sin y$ 【90 清大電機】

【參考解答】

$(1)|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)$

$$=2(|z_1|^2+|z_2|^2)\text{，故得證。}$$

$(2)\sinh(iz_1)=i\sin(z_1)$

$(3)\cosh(iz_1)=\cos(z_1)$

$(4)\sinh(z_1+z_2)=\sinh(z_1)\cosh(z_2)+\cosh(z_1)\sinh(z_2)$

$(5)\sinh z=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$

【例題 15】

Prove $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.【90 中央電機】

【參考解答】$\sin^2 z+\cos^2 z=1$

【例題 16】

Find all values of $\ln(-4i)$.【90 台大機械】

【參考解答】$\ln(-4i)=\ln 4+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi),\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

【例題 17】

Is $\log(i^2)=2\log i$? Discuss it.【90 中正電機】

【參考解答】$\log i^2=i(\pi+4k\pi), k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

【例題 18】

Find all solution of $e^z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.【91 海洋船研通訊組】

【參考解答】$z=\ln 3+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi),\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

【例題 19】

Express all values of the following complex numbers in the form of $a+ib$, where a, b are real. $(1)(2i)^{3i}$ $(2)(1+i)^{1-i}$【88 交大電信】

【參考解答】$(1)\,w=e^{-(\frac{3}{2}\pi+6n\pi)}[\cos 3\ln 2+i\sin 3\ln 2], n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

$(2)\ w=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2n\pi}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2})]$,

$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

【例題 20】

Find all values of i^i.【90 中山光電】

【參考解答】$i^i=e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

【例題 21】

Find the principal value of $(-1+\sqrt{3}i)^{3/2}$.【91 中正電機】

【參考解答】$w=-2^{3/2}$

【例題 22】

試證明 $\sin^{-1}z=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{i-z^2})$。【中央電機】

【參考解答】由於 $\pm\sqrt{1-z^2}$ 隱含於 $\sqrt{1-z^2}$，且 $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ 有二根，

又 $e^{i\omega}=iz+\sqrt{i-z^2}$

$\therefore \omega=\frac{1}{i}\ln(iz+\sqrt{i-z^2})=\sin^{-1}z$

【例題 23】

Find all values of z satisfying the given equations.

(1) $\sin z=2$

(2) $\cos z=10$, respectively.【90 中央電機】

【參考解答】(1) $z=\frac{\pi}{2}+2k\pi+\frac{1}{i}\ln(2\pm\sqrt{3}), k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

(2) $z=\frac{1}{i}\ln(10\pm\sqrt{99})+2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$