提要 17：解一階 ODE 的第十個方法--Clairaut 方程式的解法

已知 Clairaut 方程式可表爲：

$$y = xy' + g(y') \tag{1}$$

通常 $g(y')$中之 y' 並非以 y' 的**正一次方**存在，故 $g(y')$係屬於非線性項，亦爲 Clairaut 方程式爲非線性微分方程式。解析非線性微分方程式的方法並不是以積分的方式，而是採用微分，說明如下。式(1)再對 x 作微分，則：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}y' + x\frac{dy'}{dx} + \frac{dg(y')}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y' + x\frac{dy'}{dx} + \frac{dg(y')}{dy'}\frac{dy'}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \frac{dg(y')}{dy'}\right)\frac{dy'}{dx} = 0 \tag{2}$$

由此可知：

$$\begin{cases} \dfrac{dy'}{dx} = 0 & \text{(3a)} \\[2ex] x + \dfrac{dg(y')}{dy'} = 0 & \text{(3b)} \end{cases}$$

由式(3a)知，y' 必是常數，否則其微不會是零，故 $y' = C$，其中 C 爲常數。再將 $y' = C$ 代回式(1)，則 y 之解即可求出：

$$\boxed{y = Cx + g(C)} \tag{4}$$

式(4)包含未知常數 C，其相當於問題之解的積分常數，而包含未知常數 C 之解就可定義爲通解。另外，由式(3b)知，只要知道 $g(y')$之函數型態，即可求出 y' 與 x 的關係，再將 y' 與 x 的關係代回(1)，則可找到問題之另一種解，稱爲**奇異解(*Singular Solution*)**。

範例一
試解出 Clairaut 方程式 $y = xy' + \frac{1}{y'}$ 之解。

【解答】

原式對 x 作微分，則：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}y' + x\frac{dy'}{dx} + \frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y' + x\frac{dy'}{dx} - \frac{1}{y'^2}\frac{dy'}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x - \frac{1}{y'^2}\right)\frac{dy'}{dx} = 0$$

故

$$\begin{cases} \dfrac{dy'}{dx} = 0 & \text{(1a)} \\ x - \dfrac{1}{y'^2} = 0 & \text{(1b)} \end{cases}$$

1. 由式(1a)知，y' 必定是常數，即 $y' = C$，再代回原式，故可求出問題之**通解**：

$$\boxed{y = Cx + \frac{1}{C}}$$

2. 由式(1b)知，$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$，代回原式可知問題之**奇異解**：

$$y = x\left(\pm\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{\pm\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \pm 2\sqrt{x}}$$

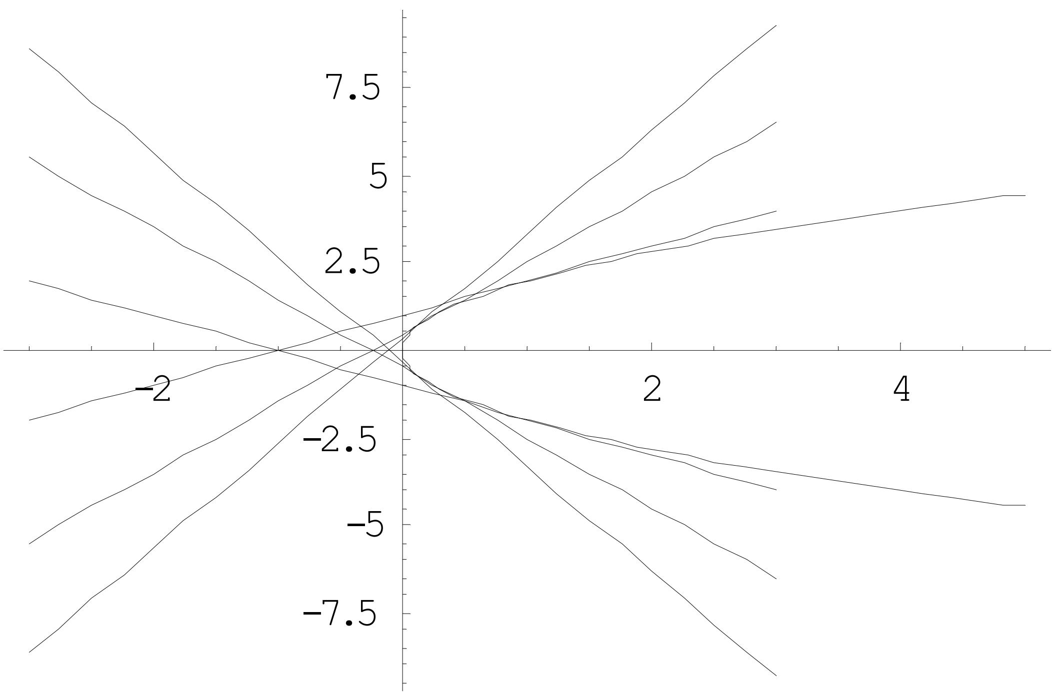
註：

1. 奇異解並無法令通解中之常數 C 爲適當值獲得。
2. 在幾何圖形上發現，給予通解中之 C 值爲任意適當常數，即可產生一條曲線，通解的幾何圖形係呈現曲線族之情況；而奇異解恰爲通解所形成的曲線族之**漸進線**。例

題 1 即呈現此一情況。

3. 所謂的線性微分方程式，係指微分方程式中，與應變數(*Dependent Variable*，通常以符號 y 表示)相關之項次 y 、 y' 、 y'' 、 y''' 等等，在每一個項次中僅出現**正一次方**。若問題不屬於線性微分方程式，就算是非線性微分方程式。

4. 在 Mathematica 中繪圖表示時，需先將個別 C 值代入 y 中並畫圖，若 C 值分別考慮為 -3 、 -2 、 -1 、 1 、 2 、 3 ，則其指令分別為 $f_1 = Plot[\text{-}3*x-\frac{1}{3},\{x,-3,3\}]$ ，$f_2 = Plot[\text{-}2*x-\frac{1}{2},\{x,-3,3\}]$ ， $f_3 = Plot[\text{-}1*x-1,\{x,-3,3\}]$ ，$f_4 = Plot[1*x+1,\{x,-3,3\}]$ ， $f_5 = Plot[2*x+\frac{1}{2},\{x,-3,3\}]$ ，$f_6 = Plot[3*x+\frac{1}{3},\{x,-3,3\}]$。而漸近線 $y=\pm 2\sqrt{x}$ 亦繪出 $x\in[-3,3]$的範圍，其指令分別為 $f_7 = Plot[2*\sqrt{x},\{x,-3,3\}]$，$f_8 = Plot[\text{-}2*\sqrt{x},\{x,-3,3\}]$。最後再將所有曲線繪在同一張圖上，其 Mathematica 指令為 $f_9 = Show[f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8]$，在每一個方程式輸入好後，按 Shift+Enter 鍵即可得先繪出 xy 座標平面，再利用 f_9 指令將問題之通解與奇異解的圖放在同一張圖中，如以下所示：



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

習題

1. Solve the general solution of $2(y')^2-(2y^2+x)y'+xy^2=0$.【93 台大化工所 10%】

2. Find the general solution of following ordinary differential equation.

$$4x(y')^2+2xy'-y=0$$【93 北科土木所 10%】

3. Solve the general solution $(y')^2-xy'+y=0$.【92 中興土木所 10%】

4. 求奇異解與通解：$y=2xy'+y(y')^2$.【91 高科營建所 15%】

5. Solve $y=xy'+\frac{1}{2}(y')^2$.【93 海洋導航所 10%，成大電機所 5%】

6. Solve $y=xy'-\frac{1}{4}(y')^2$.【交大電子所 5%】

7. 試求下列微分方程式之通解與奇異解，式中$y'=\frac{dy}{dx}$：$y=2xy'+y(y')^2$。【91 高科營建所 15%】