提要 16：解一階 ODE 的第九個方法--Riccati 方程式的解法

已知 Riccati 方程式之型式為：

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)y^2 + h(x) \tag{1}$$

其中 $h(x)$ 稱為此微分方程式之非齊性項，故此微分方程式稱為非齊性微分方程式。而非齊性微分方程式之通解一定會包含兩部分，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y \;=\; \text{齊性解 } v \;+\; \text{非齊性解 } y_1}$$

必須先找出 Riccati 方程式之非齊性解 y_1，才能進一步求出 Riccati 方程式之齊性解 v，然後通解才能完全找出來。以下分別說明非齊性解與齊性解之解析方法。

1. 非齊性解 y_1 的解析

   一般係採用觀察法推求問題之非齊性解，亦即先察看係數 $p(x)$、$q(x)$、$h(x)$ 之函數型態，再決定非齊性解 y_1 之答案的函數型態。例如若 $p(x)$、$q(x)$、$h(x)$ 之函數型態均為 x^n (n = 整數)，則極有可能其非齊性解 y_1 亦呈現 x^m (m = 整數)之函數型態。通常只要測試非齊性解 y_1 是否為 x、$-x$、x^2 或 $-x^2$ 等，即可找到 Riccati 方程式之非齊性解 y_1 了。

2. 齊性解 v 的解析

   因通解為：

$$y = v + y_1$$

   故通解需滿足原微分方程式，亦即：

$$\frac{d(v+y_1)}{dx} + p(x)(v+y_1) = g(x)(v+y_1)^2 + h(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + \frac{dy_1}{dx} + pv + py_1 = gv^2 + 2gy_1v + gy_1^2 + h \tag{2}$$

   其中 $\frac{dy_1}{dx} + py_1$ 會等於 $gy_1^2 + h$，因為 y_1 為滿足 Riccati 方程式之非齊性項的非齊性解，故式(2)可化簡為：

$$\frac{dv}{dx} + pv = gv^2 + 2gy_1v$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dx} + (p - 2gy_1)v = gv^2 \tag{3}$$

   上式係 Bernoulli 方程式之型式，只要再將 Bernoulli 方程式的解法應用一下，即可導出問題(3)之齊性解 v。以下再把 Bernoulli 方程式的解法再應用一遍。令式(3)除以 v^2：

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}+\left(p-2gy_1\right)\frac{1}{v}=g \tag{3'}$$

再令

$$u=\frac{1}{v} \tag{4}$$

則

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \tag{4'}$$

或

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dx} \tag{4''}$$

將式(4)與式(4’’)代回式(3’)：

$$-\frac{du}{dx}+\left(p-2gy_1\right)u=g$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx}-\left(p-2gy_1\right)u=-g \tag{5}$$

再引用一階線性微分方程式的解法，求解$u(x)$。即可令式(5)乘以$F(x)$：

$$F\frac{du}{dx}-F\left(p-2gy_1\right)u=-Fg \tag{6}$$

再令：

$$-F\left(p-2gy_1\right)=\frac{dF}{dx} \tag{7}$$

故式(6)可化簡為：

$$F\frac{du}{dx}+\frac{dF}{dx}u=-Fg \tag{6'}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d(Fu)}{dx}=-Fg \tag{6''}$$

再對式(6’’)之 x 變數作積分，故

$$\int\frac{d(Fu)}{dx}dx=-\int Fgdx+C$$

$$\Rightarrow \quad Fu=-\int Fgdx+C \tag{8}$$

故

$$u=\frac{1}{F}\left(-\int Fgdx+C\right) \tag{8'}$$

由式(4)知：

$$v=\frac{1}{u}=\frac{F}{-\int Fgdx+C} \tag{9}$$

故通解為：

$$y = v + y_1 = \frac{F}{-\int Fgdx + C} + y_1 \tag{10}$$

式(10)中之函數 $F(x)$ 可由式(7)推導出。由式(7)可知：

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = -(p - 2gy_1) \tag{7'}$$

再對變數 x 作積分：

$$\int \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}dx = -\int (p - 2gy_1)dx \tag{11}$$

$$\Rightarrow \quad \ln F = -\int (p - 2gy_1)dx \tag{11'}$$

故

$$F = e^{-\int (p-2gy_1)dx} \tag{11''}$$

因此，Riccati 方程式之通解為：

$$\boxed{y = \frac{F}{-\int Fgdx + C} + y_1} \tag{12}$$

其中 $F = e^{-\int (p-2gy_1)dx}$ 。

註：學習 Riccati 方程式的解法時，並不必背誦式(12)中所示之公式，而只需明白此類問題之通解 y 為齊性解 v 與非齊性解 y_1 的和即可，但另一前提是已經了解 Bernoulli 方程式的解法了。

範例一
試求 Riccati 方程式 $\frac{dy}{dx}+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)y=x^3y^2+x^5$ 之通解。

【解答】

Riccati 方程式之通解 y 為齊性解 v 與非齊性解 y_1 之和，以下分別推求 y_1 與 v。

1. 求非齊性解 y_1

由觀察知，Riccati 方程式中之係數 $\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)$、$x^3$ 與非齊性項 x^5 均與 x^n (n = 整數) 有關，故可假設非齊性解 $y_1=x$ 試試看。若令 $y_1=x$，然後代回原式，則原式

$$\text{等號左邊} = \frac{dx}{dx}+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)(x)=2x^5$$

$$\text{等號右邊} = x^3(x)^2+x^5=2x^5$$

故 y_1 確實是 x 沒錯。

2. 求齊性解 v

因為通解 y 可表示為齊性解 v 與非齊性解 y_1 之和，即：

$$y=v+y_1=v+x \tag{a}$$

故可將上式代回原式：

$$\frac{d(v+x)}{dx}+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)(v+x)=x^3(v+x)^2+x^5$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}+\frac{dx}{dx}+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)v+2x^5-1=\left(x^3v^2+2x^4v+x^5\right)+x^5$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}+\left(2x^4-\frac{1}{x}\right)v=x^3v^2+2x^4v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=x^3v^2 \tag{b}$$

上式為 Bernoulli 方程式，再引用 Bernoulli 方程式的解法，令原式除以 v^2：

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}\frac{1}{v}=x^3 \tag{b'}$$

再令

$$u=\frac{1}{v} \tag{c}$$

故

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \tag{c'}$$

即

$$\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dx} \tag{c''}$$

將式(c')與式(c'')代回式(b')，則

$$-\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = x^3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = -x^3 \tag{d}$$

上式為一階線性微分方程式，令上式乘以 $F(x)$：

$$F\frac{du}{dx} + \frac{F}{x}u = -Fx^3 \tag{e}$$

再令

$$\frac{F}{x} = \frac{dF}{dx} \tag{f}$$

則式(e)可改寫為：

$$F\frac{du}{dx} + \frac{dF}{dx}u = -Fx^3$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d(Fu)}{dx} = -Fx^3 \tag{g}$$

再對變數 x 作積分：

$$\int \frac{d(Fu)}{dx}dx = -\int Fx^3 dx + C$$

$$\Longrightarrow \quad Fu = -\int Fx^3 dx + C$$

故

$$u = \frac{1}{F}\left(-\int Fx^3 dx + C\right) \tag{h}$$

再引用式(f)推求 $F(x)$。由式(f)知：

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = \frac{1}{x} \tag{i}$$

然後對變數 x 作積分：

$$\int \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\Longrightarrow \quad \ln F = \ln x \tag{j}$$

故

$$F = x \tag{k}$$

再代回式(h)，因此

$$u=\frac{1}{x}\left(-\int x^4dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^5}{5}+C\right) \qquad (l)$$

另外，由式(c)知，齊性解v應表為：

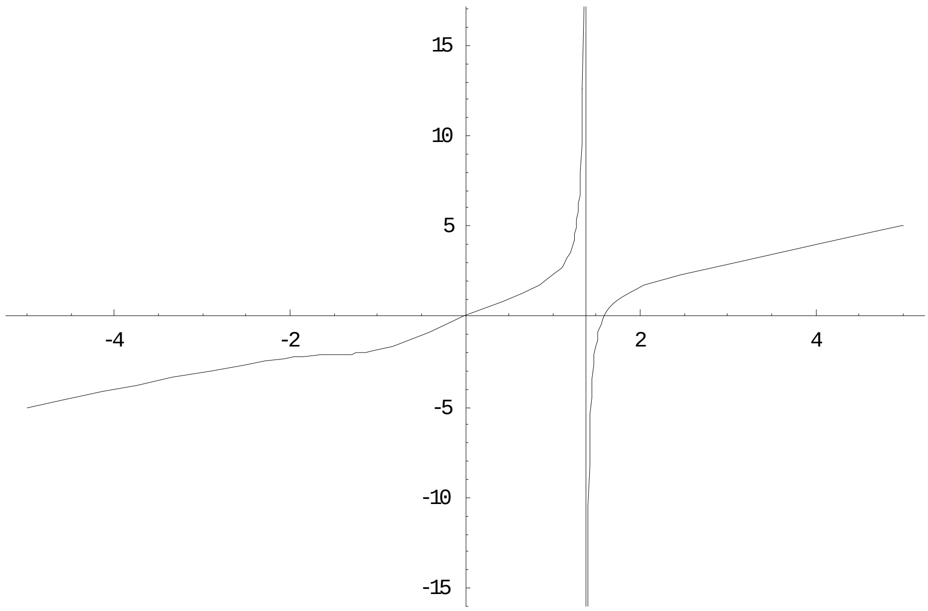
$$v=\frac{1}{u}=\frac{x}{-\frac{x^5}{5}+C} \qquad (m)$$

故由式(a)知，通解為：

$$\boxed{y=\frac{x}{-\frac{x^5}{5}+C}+x}$$

若考慮 C = 1，並以 Mathematica 軟體畫圖，則其指令為 $Plot[\frac{x}{-\frac{x^5}{5}+1}+x$, { x , -5 , 5}]，

然後再按 Shift+Enter 即可得，其圖形如以下所示。



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

習題

1. Solve $y' = y^2 - xy + 1$, which has a particular solution $y_p = x$ by inspection.【94 清大電機所 7%】

2. Solve $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x} + 1$, $y(1) = 3$.【94 中央光電所 10%】

3. Solve $\dfrac{dy}{dx} = x^3 (y - x)^2 + \dfrac{y}{x}$. Hint: $y_p = x$ is a solution.【92 海洋機械所 20%】

4. Find the general solution of $\dfrac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2$.【90 台大化工所 20%】

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$，已知 $y_1 = \dfrac{2}{x}$ 為一解，求通解。【91 中原機械所 20%】

6. Equation $y' + ay^2 + by + c = 0$ with arbitrary constants a, b and c.
   (a) Try to apply substitution to change the equation into a constant coefficient linear second order differential equation.
   (b) Given that a = 1, b = 2, c = 1 and y(1) = 0, solve for the equation. 【87 成大電機所 10%】