提要 15：解一階 ODE 的第八個方法--Bernoulli 方程式的解法

已知 Bernoulli 方程式可表為：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{a} \text{ ， } a\neq 0,1 \tag{1}$$

其解題精神是想辦法利用變數變換的觀念，將 Bernoulli 方程式簡化為提要 14 所示之一階線性微分方程式，再利用提要 14 的解法推求問題之解。

其解法是發明微積分的大師 Leibnitz 想出來的，說明如後。式(1)全部除以 y^{a} 時，可得：

$$\frac{1}{y^{a}}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-a}=q(x) \tag{1'}$$

再令等號左邊的第二項中與 y 相關之函數 y^{1-a} 為 $v(x)$ ，亦即：

$$v(x)=y^{1-a} \tag{2}$$

則

$$\frac{dv}{dx}=(1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

式(3)之型式恰好與式(1')之第一項有關，由式(3)知

$$y^{-a}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-a}\frac{dv}{dx} \tag{3'}$$

將式(2)與式(3')代入式(1')，則式(1')可改寫為：

$$\frac{1}{1-a}\frac{dv}{dx}+p(x)v=q(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}+(1-a)pv=(1-a)q(x) \tag{4}$$

此一方程式即為提要 14 中所述之一階線性微分方程式的標準式，故可繼續採用提要 14 中之解法推求式(4)之解，最後再引用式(2)，將 v 變數與 y 的關係換回來即可。提要 14 中說，一階線性微分方程式 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=r(x)$ 的通解為 $y=e^{-\int pdx}\left(\int re^{\int pdx}dx+C\right)$，故式(4)之通解為：

$$v=e^{-\int(1-a)pdx}\left[\int(1-a)qe^{\int(1-a)pdx}dx+C\right] \tag{5}$$

由式(2)知：

$$\boxed{y^{1-a}(x)=e^{-\int(1-a)p(x)dx}\left[\int(1-a)q(x)e^{\int(1-a)p(x)dx}dx+C\right]} \tag{6}$$

註：讀者只需記得將式(1)化簡為式(1')，然後將所出現的 y^{1-a} 改為單一變數 v 即可，無需記住式(6)。

範例一
試求 $\frac{dy}{dx}-x^2y=-x^2y^2$ 之解。

【解答】

原式除以 y^2 ，則原式可改寫為：

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-x^2y^{1-2}=-x^2 \qquad (a)$$

再令：

$$v(x)=y^{1-2}=y^{-1} \qquad (b)$$

則

$$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

即

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}=-\frac{dv}{dx}$$

因此式(a)可改寫為：

$$-\frac{dv}{dx}-x^2v=-x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx}+x^2v=x^2 \qquad (c)$$

前式即為一階線性微分方程式，再採用提要 14 之解法即可求出問題之解。令式(c)乘以 $F(x)$：

$$F\frac{dv}{dx}+x^2Fv=x^2F \qquad (d)$$

再令

$$x^2F=\frac{dF}{dx} \qquad (e)$$

則式(d)可改寫為

$$F\frac{dv}{dx}+\frac{dF}{dx}v=x^2F \qquad (f)$$

上式可進一步合併以方便積分：

$$\frac{d(Fv)}{dx}=x^2F \qquad (g)$$

再對變數 x 作積分：

$$\int\frac{d(Fv)}{dx}dx=\int x^2Fdx+C$$

$$\Longrightarrow \quad Fv = \int x^2 F dx + C$$

所以

$$v = \frac{1}{F}\left(\int x^2 F dx + C\right) \qquad (h)$$

需再推算$F(x)$之結果。由式(e)知：

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx} = x^2$$

再分別對 x 作積分：

$$\int \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} dx = \int x^2 dx$$

$$\Longrightarrow \quad \ln F = \frac{x^3}{3}$$

所以

$$F = e^{\frac{x^3}{3}} \qquad (i)$$

代回式(h)：

$$v = \frac{1}{e^{\frac{x^3}{3}}}\left[\int x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx + C\right]$$

$$= e^{-\frac{x^3}{3}}\left[\int e^{\frac{x^3}{3}} d\left(\frac{x^3}{3}\right) + C\right]$$

$$= e^{-\frac{x^3}{3}}\left[e^{\frac{x^3}{3}} + C\right]$$

$$= 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}} \qquad (j)$$

由式(b)知：

$$v = y^{-1}$$

故通解爲：

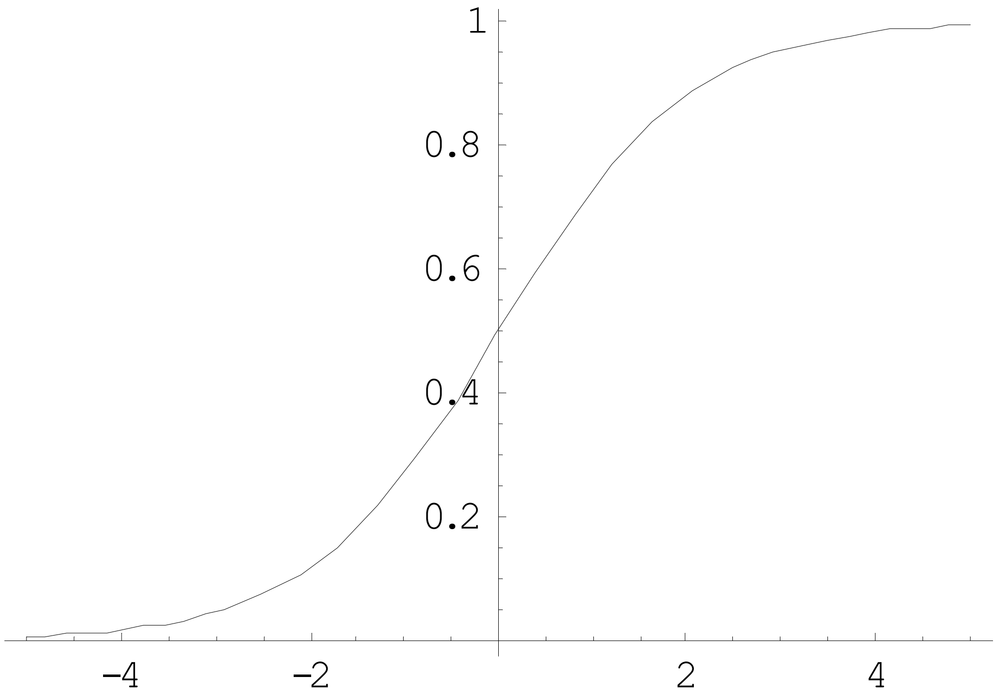
$$y^{-1} = 1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}} \qquad (j')$$

或

$$\boxed{y = \frac{1}{1 + Ce^{-\frac{x^3}{3}}}}$$

若考慮 $C=1$，並以 Mathematica 軟體畫圖，則其指令為 $Plot[\frac{1}{1+Exp[\frac{x}{3}]^{3}},\{x,-5,5\}]$，

其圖形如以下所示。



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

習題

1. (a) Setting $x = e^z$, show that $x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dz}$, $x^2\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz}$.

   (b) Solve the differential equation $x\frac{dy}{dx} + y + x^2y^2 = 0$.

   Hint：Introduce a new variable $v = y^{-1}$.

2. Solve the following differential equation $y' + \frac{1}{x}y = 3x^2y^2$.【89 台科營建所丙組】

3. Find the integral curves of the equation $y' + 4y = 3e^{2x}y^2$.【93 交大交研所】

4. Solve $2x\frac{dy}{dx} = 10x^3y^5 + y$.【94 中興化工所 10%】

5. Find the general solution of $x^2y + y^3 + xy^2y' = 0$, $y(1) = 1$.【94 台科電子所 10%】

6. Solve the general solution of $x^2y' = xy + 3y^2$.【94 中興精密所 15%】

7. Solve $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y$.【94 中興環工所 5%】

8. Solve $y' + y = -\frac{2x}{y}$, $y(0) = 2$.【93 中央機械所 10%】

9. Solve the following differential equation $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$. (hint: a Bernoulli differential equation.)【9 台大電機所 10%】

10. Find the general solution of $\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.【94 中興材料所 8%】

11. Solve $\frac{dx}{dt} = -x - x^3$, $x(0) = k > 0$.【94 高應電機所 10%】

12. Solve $(1 - x^2)y' - xy = xy^2$.【93 台大環工所 8%】

13. Consider the differential equation $xy' + y = -2x^2y^2$, $x > 0$.
    (a) Transform the above differential equation into a linear first-order differential equation.
    (b) Find the general solution.【95 交大電子所 10%】

14. Solve $y' - y = xy^5$.【94 屏科機械所 15%，93 輔仁電子所 10%】

15. Solve $y'+y=x^3y^3$.【94 高應電子所 10%】

16. Solve $y'+y=y^6$.【93 台大生物環境所 10%】

17. Solve $y'+\frac{1}{x}y=x^{-4}y^{-\frac{3}{4}}$, $y(1)=1$.【93 高科機械所 20%】

18. Solve $3y'+y=(1-2x)y^4$.【92 淡江化工所 15%】

19. Solve $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$.【91 屏科機械所 20%】

20. Solve $y'+xy=xy^{-1}$.【91 中興環工所 10%】

21. The general solution of $x^2y'+xy=-y^{-\frac{3}{2}}$ is?【94 成大環工所 3%】

22. Solve $xy'-y=\frac{x^2}{y}$.【89 中山光電所 15%】

23. Solve $y'+\frac{y}{x}=\frac{33}{y}$, $y(0)=0$.【89 台科化工所 15%】

24. Solve $y'+\frac{y}{x}=\frac{32}{y}$, $y(1)=0$.【89 台科化工所 15%】

25. Solve $xy'=y+xy^2$.【91 中正電機所 6%】

26. Solve $xy'=\frac{y^2}{x}+y$.【91 台大化工所 10%，91 淡江電機所 20%】

27. Solve $y'-\frac{2}{x}y=-\frac{y^2}{x}$.【90 北科化工所 20%】

28. Solve $y'+\frac{y}{x}=(\ln x)y^2$, $y(1)=1$.【87 成大造船所 13%】

29. Solve $x^2y'-xy=y^3$.【87 雲科環安所 10%】

30. Solve $y'-\frac{y}{x}=x^3y^2$.【88 北科機電整合所 8%】

31. Solve $xy'=\frac{2y^2}{x}+y$.【88 台科電機所 10%】

32. Solve $3x^2y'-y^2-3xy=0$.【88 台科營建所 17%】

33. Solve $x^3 y' = x^2 y - y^3$.【91 長庚電機所 6%】

34. Solve $xy' = (y-x)^3 + y$.【91 北科自動化所 20%】

35. Solve $y' = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$, $y(-1) = \frac{5}{2}$.【87 北科機電所 10%】

36. Solve $x^2 y' = y^2 + 2xy$. 【89 成大造船所 16%】

37. Solve $3y^4 - 1 + 12xy^3 y' = 0$, $y(1) = 2$.【87 成大製造所 5%】

38. Solve $y' = y\cosh x$, $y(0) = 1$.【91 清大電機所 5%】

39. Solve $y' + \frac{1}{2}y = y^3$, $y(0) = 1$, you may set $u = y^{-2}$.【90 中興物理所 15%】

40. Solve the general solution of Bernoulli equation $y' + \frac{y}{x} - xy^2 = 0$.【90 北科通訊所 10%】

41. Solve $x^2 y' - xy = e^x y^3$.【86 台科營建所 15%】

42. Solve $3(1+x^2)y' + 2xy = 2xy^4$.【88 北科高分子所 8%】

43. Solve $x^2 y' - y - y^2 = 0$.【88 北科高分子所 8%】

44. Solve $2xy' - 10x^3 y^5 = y$, $y(1) = 1$.【89 清大原子所 5%】

45. Solve $y' - 5xy = xy^3$.【89 北科高分子所 10%】

46. Use (a) the separable form method, (b) the integrating factors method, and (c) reduction to linear form (Bernoulli Equation), find the solution of the following equation $y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}$.【91 彰師電機所 30%】

47. For the non-exact differential equation $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$, find general solution by
(a) reducing it to a separable differential equation through homogeneous function method.
(b) using integrating factor.
(c) using variable transformation $u = y^2$.
(d) using Bernoulli ODE. 【91 海洋機械所 20%】

48. Solve $y' = x^3 y^2 + xy$.【89 中興水保所 10%】

49. The equation $y' + p(x)y = q(x)y^n$ is called Bernoulli equation.

(a) Shown that by transforming the dependent variable from $y(x)$ to $v(x)$ according to $v = y^{1-n}$ (for $n \neq 0,1$), the equation can be converted to $v' + (1+n)p(x)v = (1-n)q(x)$.

(b) Find the general solution of the equation $xy' - 2y = x^3y^2$. 【90 成大工科所 6%】

50. Solve $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$.【91 彰師機械所 10%】

51. Solve $y' + \frac{y}{x} = 3x^2y^3$. (Hint: Bernoulli equation, set $z(x) = y^{-2}$.)【91 淡江化工所 20%】

52. 試解微分方程式（Differential Equation）$\frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$之通解（General Solution）。【91 屏科機械所 20%】

53. Find the general solution of the following ordinary differential equation $y' + 8x^3y^3 + 2xy = 0$.【87 中山電機所 15%】

54. 試求解一階微分方程之通解$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x$。【94 交大土木所 15%】

55. 試解$2xy' = 2y - (y-x)^2$。（提示：利用變數變換化成 Bernoulli equation。）【89 北科土木所】

56. 試求解一階微分方程通解$2xyy' + (x-1)y^2 = x^2e^x$, where y is a function of x。【94 交大土木所 15%】