提要 14：解一階 ODE 的第七個方法—兩項合併為一項的方法

一階線性微分方程式的標準型式為：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=r(x) \tag{1}$$

上式每一項都乘以 $F(x)$ 後，可得：

$$F(x)\frac{dy}{dx}+F(x)p(x)y=F(x)r(x) \tag{2}$$

再令：

$$Fp=\frac{dF}{dx} \tag{3}$$

則式(2)可表為：

$$F\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dx}y=Fr \tag{4}$$

由微分法則 $(fg)'=f'g+fg'$ 知，式(4)可改寫為：

$$\frac{d(Fy)}{dx}=Fr \tag{4'}$$

再對 x 作積分：

$$\int\frac{d(Fy)}{dx}dx=\int Frdx+C$$

$$\Rightarrow \quad Fy=\int Frdx+C$$

所以問題之通解為：

$$y=\frac{1}{F}\left(\int Frdx+C\right) \tag{5}$$

因此，只要能知道 $F(x)$ 的函數型態，則此問題之解即可求出，以下說明 $F(x)$ 的推導方式。由式(3)知：

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=p$$

再分別對 x 作積分：

$$\int\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}dx=\int pdx$$

$$\Rightarrow \quad \ln F=\int pdx$$

則 $F(x)$ 可推導出：

$$F(x)=e^{\int p(x)dx} \tag{6}$$

註：很多書都將式(5)表示成：

$$y = e^{-\int p dx}\left(\int r e^{\int p dx} dx + C\right) \tag{5'}$$

但讀者不需記式($5'$)之公式，只要記住解題方法是採用合併微分式(4’)的概念即可。

範例一
試求 $\frac{dy}{dx}-y=x^2$，$y(0)=1$之解。

【解答】

原式乘以 $F(x)$，則

$$F\frac{dy}{dx}-Fy=Fx^2 \tag{a}$$

再令

$$-F=\frac{dF}{dx} \tag{b}$$

故式(a)可改寫為：

$$F\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dx}y=Fx^2$$

上式等號左邊可合併為一個項次的微分：

$$\frac{d(Fy)}{dx}=Fx^2$$

再對 x 作積分：

$$\int\frac{d(Fy)}{dx}dx=\int Fx^2dx+C$$

$$\Longrightarrow \quad Fy=\int Fx^2dx+C$$

故通解可表為：

$$y=\frac{1}{F}\left(\int Fx^2dx+C\right) \tag{c}$$

只要再求出 $F(x)$，通解即可完全求出來。式(b)整理後再對變數 x 作積分，故：

$$\int\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}dx=\int(-1)dx$$

所以

$$\ln F=-x$$

因此

$$F(x)=e^{-x}$$

將 $F(x)$代回式(c)，則

$$y=\frac{1}{e^{-x}}\left(\int x^2e^{-x}dx+C\right)$$

$$=e^x\left[\int x^2d\left(-e^{-x}\right)+C\right]$$

$$= e^{x}\left[\left(x^{2}\right)\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)d\left(x^{2}\right)+C\right]$$

$$= e^{x}\left[-x^{2}e^{-x}+\int e^{-x}\left(2xdx\right)+C\right]$$

$$= e^{x}\left[-x^{2}e^{-x}+2\int xd\left(-e^{-x}\right)+C\right]$$

$$= e^{x}\left\{-x^{2}e^{-x}+2\left[\left(x\right)\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)dx\right]+C\right\}$$

$$= e^{x}\left\{-x^{2}e^{-x}+2\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]+C\right\}$$

所以問題之通解為：

$$\boxed{y=-x^{2}-2x-2+Ce^{x}}$$

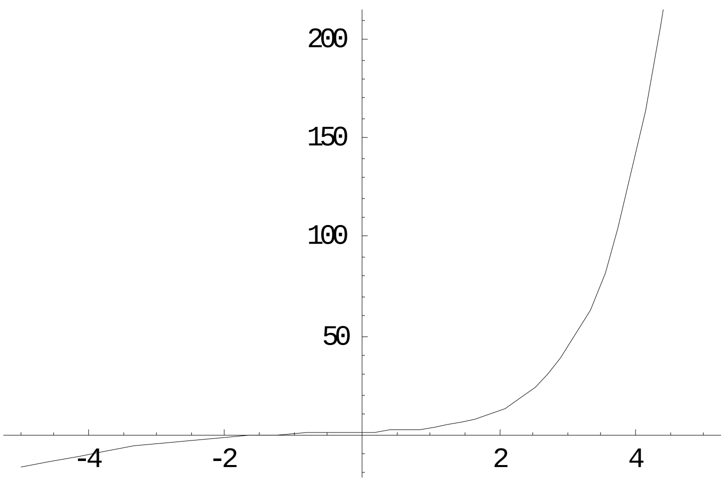
再代入初始條件 $y(0)=1$ 求特解：

$$1=-0^{2}-2(0)-2+Ce^{0}$$

所以 $C=3$，故滿足初始條件的特解為：

$$\boxed{y=-x^{2}-2x-2+3e^{x}}$$

若以 Mathematica 軟體畫圖，則其指令為 $Plot[-x^{2}-2\times x-2+3\times Exp[x],$ ，其圖形如以下所示。



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

習題

1. 解 $y'+(\tan x)y=\sin 2x$ 。【台大造船所】

2. Solve $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sin 2x$, $y(0)=1$.【中原機械所 10%，91 台科化工所 10%】

3. Solve $y'+y\tan x=\sin x$, $y(0)=1$.【87 中原土木所 6%】

4. Solve $y'+y\tan x=\sec x$.【87 中央太空所 10%】

5. Please solve the following initial value problem: $y'+3x^2y=e^{-x^3}/x^2$.【96 暨大研究所 18%】

6. (a) Solve $y'=(x+4y)/x$, $y(0)=0$. (b) $y'=(x+4y)/x$, $y(0)=1$.【93 台大土木所 12%】

7. Solve $x\dfrac{dy}{dx}+(1-x)y=xe^x$.【93 大同光電所 12%】

8. Solve $\dfrac{dy}{dx}=1+\dfrac{2x}{x^2+1}y$.【94 中央環工所 25%】

9. Solve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2-y}{x\ln x}$.【94 台大機械所 15%】

10. Solve $y'+y\cot x=5\exp(\cos x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-4$.【93 輔仁電子所 10%】

11. Given $y'+P(x)y=Q(x)$, (1) find general solution, (2) $P=-2x$, $Q=x$, solve y.【94 交大電子所 10%】

12. Solve $xy'-4y=x^6e^x$.【90 中原土木所 6%】

13. Solve $xy'-2y=x^3e^x$.【90 北科自動化所 20%】

14. Solve $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2+2$.【88 台科高分子所 12%】

15. Solve $x^3y'+3x^2y+x^2-1=0$, $y(1)=1$.【88 中央光電所 7%】

16. Solve $y'-\dfrac{2}{x}y=4x$, $y(1)=2$.【87 北科電力所 15%】

17. Solve $xy' + 2y = e^{x^2}$.【87 義守電子所 10%】

18. Solve $y' = 3x^2(y+2)$, $y(4) = 8$.【88 中原醫工所 10%】

19. Solve $xy' + 2y = \frac{1}{x}\sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.【90 交大機械所 25%】

20. Solve $xy'' - y' = (x+3)x^2 e^x$.【90 中興土木所 10%】

21. For the differential equation $x^2 - 2x + xy' + 2y = 0$, (a) find homogeneous solution, (b) find particular solution. 【91 中山通訊所 15%】

22. Solve $y' + 2xy = 4x$, $y(0) = 3$.【89 清大原子所 5%，89 淡江化工所 10%】

23. Solve $(x+2)^2 y' = 5 - 8y - 4xy$.【90 元智工工所 10%】

24. Given $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

(a) Find a general solution of y.

(b) If $P(x) = -2x$, $Q(x) = x$, find y. 【92 交大電子所 10%】

25. Solve $y' + y = (x+1)^2$, $y(0) = 3$.【90 中正電機所 10%】

26. Solve $(x^3+1)y' + 3x^2 y = x^2 - 1$.【89 淡江土木所 15%】

27. Solve $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$.【89 成大水利所 12%】

28. Solve $y' = 4x^2 - \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$.【89 中興水保所 10%】

29. Solve $y' + 3y = 3$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = 2$.【88 雲科電機所 10%】

30. Solve $y' + f(x)y = r(x)$, then solve $y' - y = e^{2x}$.【88 北科土木所 10%】

31. Solve $y' + y\left(\frac{2}{t} - \frac{t}{4}\right) = \frac{1}{t}$.【87 台大機械所 5%】

32. Solve $(x^2-4)y' + 2xy + 4 = 0$.【88 雲科環安所 10%】

33. Solve $y' - y = e^{2x} + x^2$.【88 交大土木所 15%】

34. Solve $xy' + 2y = e^x + \ln x$.【88 元智工工所 10%】

35. Solve $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = 1 + x^2$, $y(0) = 1$.【88 台科化工所 10%】

36. Solve $\left(x^2+4\right)y' = 2x - 8xy$, $y(0) = 1$.【88 成大電機所 5%】

37. Solve $y'\tan x - 2y = 4$.【87 中央土木所 10%】

38. There are four different first-order differential equations:

① $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

② $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-3xy-4x+4}{x^2-x-2}$

③ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos(xy)-e^{2y}}{2xe^{2y}-x\cos(xy)+2y}$

④ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2e^{xy}+5y-y^2}{x-2e^{xy}}$

(a) Which is the linear equation? Please prove it.
(b) Please solve this linear equation.
(c) Which is the exact equation? Please prove it.
(d) Please solve this exact equation. 【91 交大應化所 30%】

39. Solve (a) $y' + y = xe^{-x}$ (b) $y' + 3y = 4x$, $y(0) = 2$.【91 中興土木所 20%】

40. Solve $\dfrac{dy(t)}{dt} + 3t^2 y(t) = e^{-t^3-t}$, $y(0) = y_0$.【91 交大光電所 20%】

41. Solve $y' = 3x^2 - \dfrac{y}{x}$, $y(1) = 5$.【90 雲科電機所 15%】