提要 13：解一階 ODE 的第六個方法--非正合微分方程式的解法

解題方向是想辦法將非正合微分方程改寫爲正合微分方程式，那麼提要 12 的解法就可以繼續使用了，以下說明改寫方法。若：

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

非正合微分方程式，則可乘以一個函數 $F(x,y)$，使得

$$FPdx + FQdy = 0 \tag{2}$$

變成正合微分方程式，其中 $F(x,y)$ 稱爲積分因子(Integrating Factor)。以下介紹積分因子 $F(x,y)$ 的推算方法。

1. 考慮 $F = F(x)$

因爲 $FPdx + FQdy = 0$ 爲正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \tag{3}$$

微分後：

$$\Rightarrow \quad F\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{dF}{dx} + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

整理後可得：

$$F\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{F}\frac{dF}{dx} \tag{3'}$$

因爲等號右邊是與 F 相關之運算，且 F 是 x 的函數，所以等號左邊應該也是 x 的函數才對！若等號左邊出現變數 y，則原微分方程式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 並不存在 $F(x)$ 的積分因子。若積分因子存在，則可以對(3')式作 x 變數的積分：

$$\int \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}dx = \int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$$

$$\Longrightarrow \qquad \ln F = \int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

故積分因子 $F(x)$ 可表爲：

$$\boxed{F(x) = \exp\left(\int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \right)} \tag{4}$$

同學們千萬不要嘗試去記上面的公式，只要記住式(3)即可，亦即只要記得 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ 即可。

2. 考慮 $F = F(y)$

因爲 $FPdx + FQdy = 0$ 爲正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial (FP)}{\partial y} = \frac{\partial (FQ)}{\partial x} \tag{3'}$$

上式與式(3)完全相同，但是其中之 F 是 y 的函數，而不是 x 的函數，所以式(3')微分後可表爲：

$$P \frac{dF}{dy} + F \frac{\partial P}{\partial y} = F \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow \qquad F\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = P \frac{dF}{dy}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P} \tag{5}$$

上式中，因爲等號左邊爲與 y 相關之函數 F 的運算，所以等號左邊僅與 y 有關，因此等號右邊應該也僅與 y 有關才合理。若等號右邊出現 x 變數在其中，則原微分方程式並不存在單獨與 y 變數相關之積分因子 $F(y)$，亦即假設 $F = F(y)$ 是錯誤的。若假設正確，即式(5)恆成立，則可對式(5)作 y 變數之積分，如以下所示：

$$\int \frac{1}{F}\frac{dF}{dy}dy = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{p} dy$$

$$\Rightarrow \qquad \ln F = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

故積分因子 $F(y)$ 可表爲：

$$\boxed{F(y) = \exp\left(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \right)} \tag{6}$$

同理，千萬不要想去背誦式(6)，只要記得它是由(3)來的，亦即只要記得它是由 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 來的即可。

3. 考慮 $F = F(x, y)$

在此情況下，並無法整理出類似式(4)或(6)之公式，此種類型的積分因子得靠敏銳的觀察力才能曉得，而觀察力是靠經驗的累積，只有多算題目才能獲得。通常出題目的老師並不會出這種問題來爲難考生，若有考出此一類型的問題，一定有其他更容易的解法可以拿來用。讀者須多作各種解析方法的練習，才能應付各種可能發生的情況。好比知名廚師拿手的私房菜一定有好幾道，才能應付各種場合的需要。

範例一
試求 $\left(3x^2-y^2\right)dy-2xydx=0$ 之解。

【解答】

由題意知，可令：

$$M(x,y)=-2xy \text{，} N(x,y)=3x^2-y^2$$

因爲

$$\frac{\partial(-2xy)}{\partial y}\neq\frac{\partial\left(3x^2-y^2\right)}{\partial x}$$

亦即 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，所以此微分方程式並非正合微分方程式。但可試著乘以積分因子 F，使新的微分方程式

$$F\left(3x^2-y^2\right)dy-2xyFdx=0 \tag{1}$$

爲正合微分方程式。

1. 首先考慮 $F=F(x)$

   因爲式(1)係考慮爲正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(-2xyF)}{\partial y}=\frac{\partial\left[F\left(3x^2-y^2\right)\right]}{\partial x}$$

故

$$-2xF=\left(3x^2-y^2\right)\frac{dF}{dx}+6xF$$

$$\Rightarrow \quad -8xF=\left(3x^2-y^2\right)\frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=-\frac{8x}{3x^2-y^2}$$

上式中等號左邊爲與 x 變數相關之函數 F 的運算，但等號右邊卻出現變數 y，所以 $F=F(x)$ 的假設不對，即 $F\neq F(x)$。

2. 再考慮 $F=F(y)$

   同理，因爲式(1)係考慮爲正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(-2xyF)}{\partial y}=\frac{\partial\left[F\left(3x^2-y^2\right)\right]}{\partial x}$$

故

$$-2xF-2xy\frac{dF}{dy}=6xF$$

$$\Longrightarrow \quad -2xy\frac{dF}{dy}=8xF$$

$$\Longrightarrow \quad -y\frac{dF}{dy}=4F$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dy}=-\frac{4}{y}$$

$$\Longrightarrow \quad \int\frac{1}{F}\frac{dF}{dy}dy=-\int\frac{4}{y}dy$$

$$\Longrightarrow \quad \ln F=-4\ln y$$

即

$$\boxed{F=y^{-4}}$$

因爲

$$y^{-4}\left(3x^2-y^2\right)dy-y^{-4}\left(2xy\right)dx=0$$

爲正合微分方程式，所以可以採用提要 12 所示正合微分方程式的解法推求其解，其解題過程如下。因爲：

$$M=-2xy^{-3}\text{ ， }N=3x^2y^{-4}-y^{-2}$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M\text{ ， }\frac{\partial u}{\partial y}=N$$

其中 u 爲此微分方程式之通解 $u(x,y)=C$ 中與 x、y 相關的部分，所以

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=-2xy^{-3}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^{-4}-y^{-2}\end{cases}$$

再分別對變數 x、y 作積分：

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int\left(-2xy^{-3}\right)dx+k(y)\\[2mm] \displaystyle\int\frac{\partial u}{\partial y}dy=\int\left(3x^2y^{-4}-y^{-2}\right)dy+l(x)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases}u(x,y)=-x^2y^{-3}+k(y)\\ u(x,y)=-x^2y^{-3}+y^{-1}+l(x)\end{cases}$$

比較以上兩式可知，所選擇的 $k(y)$ 與 $l(x)$ 應分別爲：

$$k(y)=y^{-1}\text{ ， }l(x)=0$$

故 $u(x,y)$ 可表爲：

$$u(x,y) = -x^2y^{-3} + y^{-1}$$

而通解應表爲有包含積分常數 C 之型式如下：

$$\boxed{-x^2y^{-3} + y^{-1} = C}$$

習題

1. Solve the following differential equation $x(3ydx+2xdy)+y^2(2ydx+4xdy)=0$.【92 成大土研所結構組】

2. Find the solution of $4xdy-ydx=x^2dy$.【94 台大土研所 10%】

3. Solve $xy'-4x^2y+2y\ln y=0$ by letting $v=\ln y$.【94 交大電機所聯招 18%】

4. Solve $\dfrac{dy}{dx}=x^3(y-x)^2+x^{-1}y$.【94 高科光電所 10%】

5. Solve the general solution of $xy'+2x^3+2xy^2-y=0$.【94 大同機械所 10%】

6. Solve $(1+xy)y+(1-xy)x\dfrac{dy}{dx}=0$.【93 北科自動化所 20%】

7. Solve the following differential equation $x(\ln y-\ln x)dy=(y\ln y-y\ln x-x)dx$.【94 台大電機所 10%】

8. Solve $(3xe^y+2y)dx+(x^2e^y+x)dy=0$.【94 雲科光電所 10%】

9. Solve $(2\cos y+4x^2)dx=x\sin ydy$.【93 中興化工所 10%】

10. Find the general solution of the following differential equation:
$$(-xy\sin x+2y\cos x)dx+(2x\cos x)dy=0.$$【93 中山電機所 15%】

11. Solve the general solution of $(y^2-9xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$.【94 台科電機所 10%】

12. Solve $xdy-[y+xy^3(1+\ln x)]dx=0$, $y(1)=1$.【93 北科車輛所 15%】

13. Sove $e^xdx+(e^x\cot y+2y\csc y)dy=0$.【92 中山電機所 15%】

14. Solve $(3\cosh y+4)dx+x\sinh y\,dy=0$.【92 北科高分子所 10%】

15. Solve $y^3+(x^2-2xy^2)y'=0$.【92 北科高分子所 10%】

16. Solve the general solution $y'=-(3x^2y+6xy+0.5y^2)/(3x^2+y)$.【92 北科自動化所 20%】

17. Solve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x\sin y}{y-2e^x\cos y}$, $y(0)=\dfrac{3}{2}\pi$.【90 台科高分子所 20%】

18. Solve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x\sin 2y-2y}{x-2x^2\cos 2y}$.【90 清大材料所 10%】

19. Solve $(x-2y+3)dx+(2x-4y-3)dy=0$.【93 北科冷凍所 10%】

20. Solve the differential equation $(y^2-6xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$, $y(1)=-2$.【94 雲科電機所 10%，93 淡江電機所 15%】

21. 求下列微分方程式的通解$(x^3-3xy^2)\dfrac{dy}{dx}=y^3-3x^2y-y\dfrac{dy}{dx}$。【93 中央環工所 20%】

22. (a) Is the differential equation $xydx+(2x^2+3y^2-20)dy=0$ exact? (b) Follow the above problem, if it is exact, please find the integrating factor first to make it exact. Then solve the corresponding differential equation.【92 台大電機所 15%】

23. Solve $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{2y}{x}$, $y(1)=4$.【93 台科電機所 10%】

24. Solve $(2y+xy)dx+2xdy=0$.【93 東華電機所 20%】

25. Solve $(y-xy^2)dx-(x+x^2y)dy=0$.【94 輔仁電子所 8%】

26. Solve $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$.【91 師大電機所 10%】

27. Solve $6xy+2y+8+xy'=0$.【90 雲科電機所 10%】

28. Solve $dx+(3x-e^{-2y})dy=0$.【95 交大機械所 10%】

29. Solve $\cos xdx+(\sin x+\cos y-\sin y)dy=0$.【95 清大電機所 5%】

30. Solve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x+y^3e^y}$.【94 中興材料所 8%】

31. Solve $(2x^3-y^3-3x)dx+3xy^2dy=0$.【88 北科高分子所 8%】

32. Solve $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$.【88 北科高分子所 8%】

33. Solve $(3xe^y+2y)+(x^2e^y+x)y'=0$.【90 海洋商船所 10%】

34. Solve $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$.【87 屏科研究所 10%】

35. Solve $2xy' = 2y + \dfrac{y}{(\ln y - \ln 2x)^2}$, $y(1) = 2e$.【91 北科光電所 7%】

36. Solve $y = (y^4 + 3x)y'$.【86 中原化工所 10%】

37. Solve $xy' - y = \dfrac{y}{\ln y - \ln x}$.【成大機械所 12%】

38. Solve $x\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{y}{\ln y - \ln x}$, $y(2) = 2$.【92 北科機電所 10%，93 交大電信所 5%】

39. Solve $(y + x^2)dx - xdy = 0$.【87 台大造船所 15%】

40. Solve $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$.【86 交大機械所 7%】

41. Solve $1 + x^2y^2 + y + xy' = 0$.【86 交大電信所 10%】

42. Solve $(4xy + 6y^2)dx + (2x^2 + 6xy)dy = 0$.【89 北科環境所 15%】

43. Solve $(y^2 + 2xy)dx + x^2dy = 0$.【91 北科通訊所 10%】

44. Solve $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$.【89 北科土木所 10%】

45. 求解 $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ 。【91 彰師機電所 10%】

46. Solve $(2\cosh y + 3x)dx + x\sinh y\, dy = 0$.【89 清大電機所 6%】

47. Find the general solution of the given differential equation.

$$(y^2 + 1)dx = y\sec^2 x\, dy.$$【91 成大電機所 10%】

48. Solve $\cos y\, dx - 2(x - y)\sin y\, dy - \cos y\, dy = 0$.【88 中山電機所 15%】

49. Solve $y' = \dfrac{1}{x^2}(x + y)^2$.【90 海洋光電所 10%】

50. The integrating factor of the equation $(xy^2 + 4x^2y) + (3x^2y + 4x^3)y' = 0$ is

(a) $xy^3 + 2x^2y^2$

(b) $xy^3 + 3x^3y$

(c) $2xy^2 + x^2y$

(d) $x^3y + 2x^2y^2$

(e) $2xy + 3x^2y$ 【90 台大物理所 10%】

51. Solve $(\cos 2x)y' = 2(y\sin 2x + \cos 2x)$.【90 北科自動化所 20%】

52. Solve $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$.【91 中山電機所 15%】

53. Solve $(y + x^2y^4)dx + 3xdy = 0$.【90 中山電機所 15%】

54. Solve $(xy + y^2 + 1)dx + (xy + x^2 + 1)dy = 0$.【91 北科通訊所 10%，台大材料所】

55. Solve $xy' - y = \dfrac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$.【91 北科通訊所 10%】

56. Find the general solution of $xdy - \left[y + xy^3(1 + \ln x)\right]dx = 0$.【90 北科車輛所 20%】

57. (a) 試證 $\dfrac{1}{xy}\dfrac{1}{f(xy) - g(xy)}$ 爲 $y\,f(xy)dx + x\,g(xy) = 0$ 之積分因子。

(b) Solve $y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$.【88 北科高分子所 10%】

58. For what value of k is the function $(y + x)^k$ an integrating factor for the differential equation $\left[(y + x)\ln(y + x) + y\right]\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ and find the general solution.【89 台科高分子所 10%】

59. Solve $(2y + e^y + 6x^2)y' + 4 + 12xy = 0$.【87 成大航太所 5%】

60. Solve $y + (3y^2 + y)y' = \dfrac{1}{x^3}$.【87 台科電子所 10%】

61. Solve $(2x - 10y^3)y' + y = 0$.【90 彰師機械所 10%】

62. Solve $2xyy' + (x - 1)y^2 = x^2e^x$.【90 南台機械所 10%】

63. Solve $y(\ln x - \ln y)dx = (x\ln x - x\ln y - y)dy$.【90 元智工工所 10%】

64. Solve $\left(1 - \dfrac{3}{y} + x\right)y' + y = \dfrac{3}{x} - 1$.【90 元智工工所 10%】

65. Solve $(2xe^x - y^2)dx + 2ydy = 0$.【91 台大生物環境所 5%】

66. Solve $y' = (e^y - x)^{-1}$.【90 台科控制所 10%】

67. Solve $(x^3 - y^2)dx + xy(x + 1)dy = 0$.【90 崑山電機所 10%】

68. Solve $y' = \left(6e^{y} - 2x\right)^{-1}$.【89 中央電機所 5%】

69. Solve $y' \cos y + 2x \sin y = 2x$.【86 中興化工所 6%】

70. Solve $\left(e^{y} + x\right) y' = 1$.【88 清大電機所 5%】

71. Solve $1 + \left(3x - e^{-2y}\right) y' = 0$.【87 台科高分子所 12%】

72. Solve $y' + 1 = 4e^{-y} \sin x$.【86 雲科電機所 10%】

73. Solve $y' = k\left(xe^{-y} + 1\right) - e^{-y}$.【88 台科營建所 17%】

74. Solve $y' - 1 = e^{-y} \sin x$.【89 成大資源所 7%】

75. Solve $\left(y \sin y - 3xy\right) y' = y$.【89 清大電機所 8%】

76. Solve the following ordinary differential equation $\sin y \dfrac{dy}{dx} = \cos x\left(2\cos y - 2\sin^{2} x\right)$.【90 中興化工所 15%】

77. Find the general solution for the following differential equation:

$$6xy + 2y + 8 + xy' = 0.$$【90 雲科電機所 10%】

78. (a) Is the equation $dx + \left(3x - e^{2y}\right) dy = 0$ exact? Explain!

(b) Find an integrating factor $I(y)$.

(c) Find the solution of this equation. 【91 交大土木所 15%】

79. Consider the first order differential equation

$$\left[p(x)y - q(x)\right]dx + dy = 0$$

(a) Prove that $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ is an integrating factor.

(b) Find the general solution.【90 北科光電所 15%】

80. Consider $y - xy' = 0$.

(a) Show that the ODE is not exact.

(b) Find an integrating factor $\mu(x)$.

(c) Find an integrating factor $\nu(y)$.

(d) In the integrating factor is $\eta = x^{a} y^{b}$, $ab \neq 0$, find all such integrating factor.【88 北科低溫冷凍所 20%】

81. Solve $\left(3x + 2y\right)dx + xdy = 0$.【87 雲科化工所 7%】

82. 試解$(y-3)dx-(x+y-1)dy=0$。【92 台科營建所 7%】

83. Solve $(2x+y)dy=(x+2y)dx$.【88 台大土木所】

84. In both $\mu_1(x,y)=xy$ and $\mu_2(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}$ are integrating factors for the differential equation $y'=f(x,y)$, then what is $f(x,y)$?【92 台科電機所 10%】

85. Solve $\dfrac{dt}{dr}=\dfrac{1}{\sin t-r\tan t}$.【94 暨南通訊所 10%】

86. Solve $(\sin y)y'=\cos x(2\cos y-\sin^2 x)$.【93 高科光電所 5%】

87. Solve the following differential equation $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2y}{y^4+2xy+4x}$.【92 台大電機所 10%】