

提要 13：解一階 ODE 的第六個方法--非正合微分方程式的解法

解題方向是想辦法將非正合微分方程改寫為正合微分方程式，那麼提要 12 的解法就可以繼續使用了，以下說明改寫方法。若：

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

非正合微分方程式，則可乘以一個函數 $F(x, y)$ ，使得

$$FPdx + FQdy = 0 \quad (2)$$

變成正合微分方程式，其中 $F(x, y)$ 稱為積分因子(Integrating Factor)。以下介紹積分因子 $F(x, y)$ 的推算方法。

1. 考慮 $F = F(x)$

因為 $FPdx + FQdy = 0$ 為正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \quad (3)$$

微分後：

$$\Rightarrow F \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{dF}{dx} + F \frac{\partial Q}{\partial x}$$

整理後可得：

$$F \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \quad (3')$$

因為等號右邊是與 F 相關之運算，且 F 是 x 的函數，所以等號左邊應該也是 x 的函數才對！若等號左邊出現變數 y ，則原微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 並不存在 $F(x)$ 的積分因子。若積分因子存在，則可以對(3')式作 x 變數的積分：

$$\int \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} dx = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

$$\Rightarrow \ln F = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

故積分因子 $F(x)$ 可表為：

$$F(x) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \right) \quad (4)$$

同學們千萬不要嘗試去記上面的公式，只要記住式(3)即可，亦即只要記得 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 即可。

2. 考慮 $F = F(y)$

因為 $FPdx + FQdy = 0$ 為正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(FP)}{\partial y} = \frac{\partial(FQ)}{\partial x} \quad (3')$$

上式與式(3)完全相同，但是其中之 F 是 y 的函數，而不是 x 的函數，所以式(3')微分後可表為：

$$P \frac{dF}{dy} + F \frac{\partial P}{\partial y} = F \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Rightarrow F \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = P \frac{dF}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} \quad (5)$$

上式中，因為等號左邊為與 y 相關之函數 F 的運算，所以等號左邊僅與 y 有關，因此等號右邊應該也僅與 y 有關才合理。若等號右邊出現 x 變數在其中，則原微分方程式並不存在單獨與 y 變數相關之積分因子 $F(y)$ ，亦即假設 $F = F(y)$ 是錯誤的。若假設正確，即式(5)恆成立，則可對式(5)作 y 變數之積分，如以下所示：

$$\int \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} dy = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{p} dy$$

$$\Rightarrow \ln F = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy$$

故積分因子 $F(y)$ 可表為：

$$F(y) = \exp \left(\int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy \right) \quad (6)$$

同理，千萬不要想去背誦式(6)，只要記得它是由(3)來的，亦即只要記得它是由 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 來的即可。

3. 考慮 $F = F(x, y)$

在此情況下，並無法整理出類似式(4)或(6)之公式，此種類型的積分因子得靠敏銳的觀察力才能曉得，而觀察力是靠經驗的累積，只有多算題目才能獲得。通常出題目的老師並不會出這種問題來為難考生，若有考出此一類型的問題，一定有其他更容易的解法可以拿來用。讀者須多作各種解析方法的練習，才能應付各種可能發生的情況。好比知名廚師拿手的私房菜一定有好幾道，才能應付各種場合的需要。

範例一

試求 $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$ 之解。

【解答】

由題意知，可令：

$$M(x, y) = -2xy, \quad N(x, y) = 3x^2 - y^2$$

因為

$$\frac{\partial(-2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(3x^2 - y^2)}{\partial x}$$

亦即 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ，所以此微分方程式並非正合微分方程式。但可試著乘以積分因子 F ，

使新的微分方程式

$$F(3x^2 - y^2)dy - 2xyFdx = 0 \quad (1)$$

為正合微分方程式。

1. 首先考慮 $F = F(x)$

因為式(1)係考慮為正合微分方程式，所以

$$\frac{\partial(-2xyF)}{\partial y} = \frac{\partial[F(3x^2 - y^2)]}{\partial x}$$

故

$$-2xF = (3x^2 - y^2)\frac{dF}{dx} + 6xF$$

$$\Rightarrow -8xF = (3x^2 - y^2)\frac{dF}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = -\frac{8x}{3x^2 - y^2}$$

上式中等號左邊為與 x 變數相關之函數 F 的運算，但等號右邊卻出現變數 y ，所以 $F = F(x)$ 的假設不對，即 $F \neq F(x)$ 。

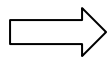
2. 再考慮 $F = F(y)$

同理，因為式(1)係考慮為正合微分方程式，所以

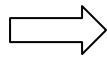
$$\frac{\partial(-2xyF)}{\partial y} = \frac{\partial[F(3x^2 - y^2)]}{\partial x}$$

故

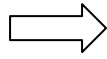
$$-2xF - 2xy\frac{dF}{dy} = 6xF$$



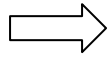
$$-2xy \frac{dF}{dy} = 8xF$$



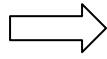
$$-y \frac{dF}{dy} = 4F$$



$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dy} = -\frac{4}{y}$$



$$\int \frac{1}{F} \frac{dF}{dy} dy = -\int \frac{4}{y} dy$$



$$\ln F = -4 \ln y$$

即

$$\boxed{F = y^{-4}}$$

因爲

$$y^{-4}(3x^2 - y^2)dy - y^{-4}(2xy)dx = 0$$

爲正合微分方程式，所以可以採用提要 12 所示正合微分方程式的解法推求其解，其解題過程如下。因爲：

$$M = -2xy^{-3}, \quad N = 3x^2y^{-4} - y^{-2}$$

且

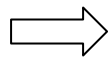
$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

其中 u 爲此微分方程式之通解 $u(x, y) = C$ 中與 x 、 y 相關的部分，所以

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -2xy^{-3} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^{-4} - y^{-2} \end{cases}$$

再分別對變數 x 、 y 作積分：

$$\begin{cases} \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int (-2xy^{-3}) dx + k(y) \\ \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (3x^2y^{-4} - y^{-2}) dy + l(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} u(x, y) = -x^2y^{-3} + k(y) \\ u(x, y) = -x^2y^{-3} + y^{-1} + l(x) \end{cases}$$

比較以上兩式可知，所選擇的 $k(y)$ 與 $l(x)$ 應分別爲：

$$k(y) = y^{-1}, \quad l(x) = 0$$

故 $u(x, y)$ 可表爲：

$$u(x, y) = -x^2 y^{-3} + y^{-1}$$

而通解應表為有包含積分常數 C 之型式如下：

$$-x^2 y^{-3} + y^{-1} = C$$

習題

1. Solve the following differential equation $x(3ydx + 2xdy) + y^2(2ydx + 4xdy) = 0$. 【92 成大土研所結構組】
2. Find the solution of $4xdy - ydx = x^2dy$. 【94 台大土研所 10%】
3. Solve $xy' - 4x^2y + 2y \ln y = 0$ by letting $v = \ln y$. 【94 交大電機所聯招 18%】
4. Solve $\frac{dy}{dx} = x^3(y-x)^2 + x^{-1}y$. 【94 高科光電所 10%】
5. Solve the general solution of $xy' + 2x^3 + 2xy^2 - y = 0$. 【94 大同機械所 10%】
6. Solve $(1+xy)y + (1-xy)x \frac{dy}{dx} = 0$. 【93 北科自動化所 20%】
7. Solve the following differential equation $x(\ln y - \ln x)dy = (y \ln y - y \ln x - x)dx$. 【94 台大電機所 10%】
8. Solve $(3xe^y + 2y)dx + (x^2e^y + x)dy = 0$. 【94 雲科光電所 10%】
9. Solve $(2 \cos y + 4x^2)dx = x \sin y dy$. 【93 中興化工所 10%】
10. Find the general solution of the following differential equation:
 $(-xy \sin x + 2y \cos x)dx + (2x \cos x)dy = 0$. 【93 中山電機所 15%】
11. Solve the general solution of $(y^2 - 9xy)dx + (3xy - 6x^2)dy = 0$. 【94 台科電機所 10%】
12. Solve $x dy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0$, $y(1) = 1$. 【93 北科車輛所 15%】
13. Solve $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$. 【92 中山電機所 15%】
14. Solve $(3 \cosh y + 4)dx + x \sinh y dy = 0$. 【92 北科高分子所 10%】
15. Solve $y^3 + (x^2 - 2xy^2)y' = 0$. 【92 北科高分子所 10%】
16. Solve the general solution $y' = -(3x^2y + 6xy + 0.5y^2)/(3x^2 + y)$. 【92 北科自動化所 20%】
17. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \sin y}{y - 2e^x \cos y}$, $y(0) = \frac{3}{2}\pi$. 【90 台科高分子所 20%】

18. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{3x \sin 2y - 2y}{x - 2x^2 \cos 2y}$. 【90 清大材料所 10%】
19. Solve $(x - 2y + 3)dx + (2x - 4y - 3)dy = 0$. 【93 北科冷凍所 10%】
20. Solve the differential equation $(y^2 - 6xy)dx + (3xy - 6x^2)dy = 0$, $y(1) = -2$. 【94 雲科電機所 10% , 93 淡江電機所 15%】
21. 求下列微分方程式的通解 $(x^3 - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = y^3 - 3x^2y - y\frac{dy}{dx}$. 【93 中央環工所 20%】
22. (a) Is the differential equation $xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0$ exact? (b) Follow the above problem, if it is exact, please find the integrating factor first to make it exact. Then solve the corresponding differential equation. 【92 台大電機所 15%】
23. Solve $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x} + \frac{2y}{x}$, $y(1) = 4$. 【93 台科電機所 10%】
24. Solve $(2y + xy)dx + 2xdy = 0$. 【93 東華電機所 20%】
25. Solve $(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0$. 【94 輔仁電子所 8%】
26. Solve $(x - y^2)dx + y(1 + x)dy = 0$. 【91 師大電機所 10%】
27. Solve $6xy + 2y + 8 + xy' = 0$. 【90 雲科電機所 10%】
28. Solve $dx + (3x - e^{-2y})dy = 0$. 【95 交大機械所 10%】
29. Solve $\cos x dx + (\sin x + \cos y - \sin y)dy = 0$. 【95 清大電機所 5%】
30. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^3 e^y}$. 【94 中興材料所 8%】
31. Solve $(2x^3 - y^3 - 3x)dx + 3xy^2dy = 0$. 【88 北科高分子所 8%】
32. Solve $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$. 【88 北科高分子所 8%】
33. Solve $(3xe^y + 2y) + (x^2e^y + x)y' = 0$. 【90 海洋商船所 10%】
34. Solve $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$. 【87 屏科研究所 10%】

35. Solve $2xy' = 2y + \frac{y}{(\ln y - \ln 2x)^2}$, $y(1) = 2e$. 【91 北科光電所 7%】
36. Solve $y = (y^4 + 3x)y'$. 【86 中原化工所 10%】
37. Solve $xy' - y = \frac{y}{\ln y - \ln x}$. 【成大機械所 12%】
38. Solve $x \frac{dy}{dx} - y = \frac{y}{\ln y - \ln x}$, $y(2) = 2$. 【92 北科機電所 10% , 93 交大電信所 5%】
39. Solve $(y + x^2)dx - xdy = 0$. 【87 台大造船所 15%】
40. Solve $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$. 【86 交大機械所 7%】
41. Solve $1 + x^2y^2 + y + xy' = 0$. 【86 交大電信所 10%】
42. Solve $(4xy + 6y^2)dx + (2x^2 + 6xy)dy = 0$. 【89 北科環境所 15%】
43. Solve $(y^2 + 2xy)dx + x^2dy = 0$. 【91 北科通訊所 10%】
44. Solve $(1 - xy + x^2y^2)dx + (x^3y - x^2)dy = 0$. 【89 北科土木所 10%】
45. 求解 $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$. 【91 彰師機電所 10%】
46. Solve $(2 \cosh y + 3x)dx + x \sinh y dy = 0$. 【89 清大電機所 6%】
47. Find the general solution of the given differential equation.
 $(y^2 + 1)dx = y \sec^2 x dy$. 【91 成大電機所 10%】
48. Solve $\cos y dx - 2(x - y)\sin y dy - \cos y dy = 0$. 【88 中山電機所 15%】
49. Solve $y' = \frac{1}{x^2}(x + y)^2$. 【90 海洋光電所 10%】
50. The integrating factor of the equation $(xy^2 + 4x^2y) + (3x^2y + 4x^3)y' = 0$ is
- (a) $xy^3 + 2x^2y^2$
 - (b) $xy^3 + 3x^3y$
 - (c) $2xy^2 + x^2y$
 - (d) $x^3y + 2x^2y^2$
 - (e) $2xy + 3x^2y$
- 【90 台大物理所 10%】

51. Solve $(\cos 2x)y' = 2(y \sin 2x + \cos 2x)$. 【90 北科自動化所 20%】
52. Solve $6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0$. 【91 中山電機所 15%】
53. Solve $(y + x^2y^4)dx + 3xdy = 0$. 【90 中山電機所 15%】
54. Solve $(xy + y^2 + 1)dx + (xy + x^2 + 1)dy = 0$. 【91 北科通訊所 10%，台大材料所】
55. Solve $xy' - y = \frac{x^3}{y}e^{\frac{y}{x}}$. 【91 北科通訊所 10%】
56. Find the general solution of $xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0$. 【90 北科車輛所 20%】
57. (a) 試證 $\frac{1}{xy} \frac{1}{f(xy) - g(xy)}$ 為 $yf(xy)dx + xg(xy) = 0$ 之積分因子。
 (b) Solve $y(x^2y^2 + 2)dx + x(2 - 2x^2y^2)dy = 0$. 【88 北科高分子所 10%】
58. For what value of k is the function $(y + x)^k$ an integrating factor for the differential equation $[(y + x)\ln(y + x) + y]\frac{dy}{dx} + y = 0$ and find the general solution. 【89 台科高分子所 10%】
59. Solve $(2y + e^y + 6x^2)y' + 4 + 12xy = 0$. 【87 成大航太所 5%】
60. Solve $y + (3y^2 + y)y' = \frac{1}{x^3}$. 【87 台科電子所 10%】
61. Solve $(2x - 10y^3)y' + y = 0$. 【90 彰師機械所 10%】
62. Solve $2xyy' + (x - 1)y^2 = x^2e^x$. 【90 南台機械所 10%】
63. Solve $y(\ln x - \ln y)dx = (x \ln x - x \ln y - y)dy$. 【90 元智工工所 10%】
64. Solve $\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)y' + y = \frac{3}{x} - 1$. 【90 元智工工所 10%】
65. Solve $(2xe^x - y^2)dx + 2ydy = 0$. 【91 台大生物環境所 5%】
66. Solve $y' = (e^y - x)^{-1}$. 【90 台科控制所 10%】
67. Solve $(x^3 - y^2)dx + xy(x + 1)dy = 0$. 【90 崑山電機所 10%】

68. Solve $y' = (6e^y - 2x)^{-1}$. 【89 中央電機所 5%】
69. Solve $y' \cos y + 2x \sin y = 2x$. 【86 中興化工所 6%】
70. Solve $(e^y + x)y' = 1$. 【88 清大電機所 5%】
71. Solve $1 + (3x - e^{-2y})y' = 0$. 【87 台科高分子所 12%】
72. Solve $y' + 1 = 4e^{-y} \sin x$. 【86 雲科電機所 10%】
73. Solve $y' = k(xe^{-y} + 1) - e^{-y}$. 【88 台科營建所 17%】
74. Solve $y' - 1 = e^{-y} \sin x$. 【89 成大資源所 7%】
75. Solve $(y \sin y - 3xy)y' = y$. 【89 清大電機所 8%】
76. Solve the following ordinary differential equation $\sin y \frac{dy}{dx} = \cos x (2 \cos y - 2 \sin^2 x)$. 【90 中興化工所 15%】
77. Find the general solution for the following differential equation:
 $3xy + 2y + 8 + xy' = 0$. 【90 雲科電機所 10%】
78. (a) Is the equation $dx + (3x - e^{2y})dy = 0$ exact? Explain!
 (b) Find an integrating factor $I(y)$.
 (c) Find the solution of this equation. 【91 交大土木所 15%】
79. Consider the first order differential equation
 $[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$
 (a) Prove that $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ is an integrating factor.
 (b) Find the general solution. 【90 北科光電所 15%】
80. Consider $y - xy' = 0$.
 (a) Show that the ODE is not exact.
 (b) Find an integrating factor $\mu(x)$.
 (c) Find an integrating factor $\nu(y)$.
 (d) In the integrating factor is $\eta = x^a y^b$, $ab \neq 0$, find all such integrating factor. 【88 北科低溫冷凍所 20%】
81. Solve $(3x + 2y)dx + xdy = 0$. 【87 雲科化工所 7%】

82. 試解 $(y-3)dx - (x+y-1)dy = 0$ 。【92 台科營建所 7%】

83. Solve $(2x+y)dy = (x+2y)dx$. 【88 台大土木所】

84. In both $\mu_1(x,y) = xy$ and $\mu_2(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ are integrating factors for the differential equation $y' = f(x,y)$, then what is $f(x,y)$? 【92 台科電機所 10%】

85. Solve $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sin t - r \tan t}$. 【94 暨南通訊所 10%】

86. Solve $(\sin y)y' = \cos x(2 \cos y - \sin^2 x)$. 【93 高科光電所 5%】

87. Solve the following differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2y}{y^4 + 2xy + 4x}$. 【92 台大電機所 10%】