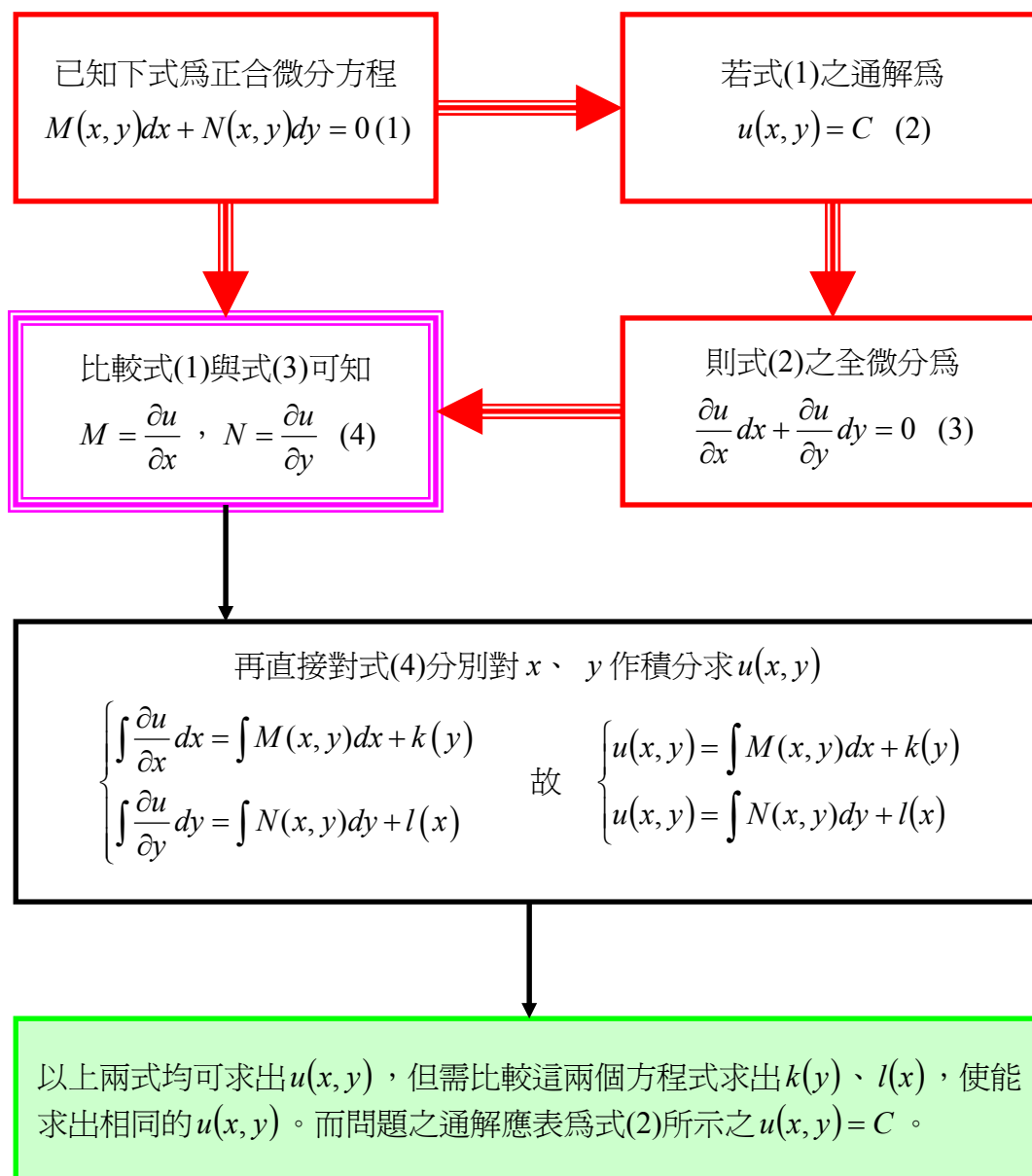


提要 12：解一階 ODE 的第五個方法--正合微分方程式的解法

首先需先明瞭正合微分方程式之解題精神，說明如下：



註：

- 另一個重要關鍵是如何判斷 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 是否為正合微分方程式？這個問題可由式(4)獲得解答。因為 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ，即 $\frac{\partial(\partial u / \partial y)}{\partial x} = \frac{\partial(\partial u / \partial x)}{\partial y}$ ，再將式(4)代入微分式，即可得知 $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ，此即為問題是否為正合微分方程式之判斷式。

2. 全微分之英文說法為 Total Differential 或 Exact Differential。學生們必須認識如何計算函數 $u(x, y)$ 之正合微分 $du(x, y)$ ，即：

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

3. 常數 C 之全微分為零，即 $dC = 0$ 。

範例一

試求 $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$ 之通解。

【解答】

首先需以判斷式 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 判斷此微分方程式是否為正合微分方程式。因為

$$M(x, y) = 2xy, \quad N(x, y) = x^2 + 1$$

所以

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

亦即

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

故此微分方程式為正合微分方程式沒錯。因此，存在 $u(x, y) = C$ 之通解，且

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = 2xy \\ \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = x^2 + 1 \end{cases}$$

再分別對 x 、 y 作積分：

$$\begin{cases} \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int 2xy dx + k(y) \\ \int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int (x^2 + 1) dy + l(x) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 y + k(y) \\ u(x, y) = x^2 y + y + l(x) \end{cases}$$

比較以上兩式可判斷出：

$$k(y) = y, \quad l(x) = 0$$

因此

$$u(x, y) = x^2 y + y$$

而問題之通解為：

$$x^2 y + y = C$$

習題

1. Solve the following differential equation $ydx + (x - \ln y)dy = 0$. 【92 成大土研所材料組】
2. Solve $(2x - y \sin x)dx + (\cos x - 3y^2)dy = 0$. 【94 彰師電機所 10%】
3. Solve $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$. 【94 清大原子所 10%】
4. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1-x^2)}$, $y(0) = 2$. 【92 中原機械所 10%】
5. Solve the initial value problem $2xy^3 + 1 + (3x^2y^2 + 1)y' = 0$, $y(1) = 1$. 【94 海洋機械所 10%】
6. 已知 $3x^2 + xy^\alpha - x^2y^{\alpha-1}y' = 0$, (a)求 α , 使得 ODE 正合。(b)求正合 ODE 之解。【94 台科營建所 15%】
7. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2+3x^2y}{1-2xy-x^3}$. 【93 大同光電所 12%】
8. Solve the exact differential equation $y(2x^2y^2 + 1)y' + x(y^4 + 1) = 0$. 【94 台大物理所 12%】
9. Solve $(ax + by)dx + (rx + sy)dy = 0$, where a, b, r, s are constants, and it is an exact equation, what is the required condition? 【94 師大機電所 17%】
10. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - e^x \sin y}{1 + e^x \cos y}$. 【94 中原電機所 10%】
11. If $cx^2ye^y + 2\cos y + (x^3ye^y + x^3e^y + kx \sin y)y' = 0$, find c and k so that the ODE is exact, and solve it. 【94 交大應化所 10%, 91 中山機電所 4%】
12. Solve $3x^2 + 2e^{2x} \sin y + (e^{2x} \cos y + 3)y' = 0$, $y(1) = 0$. 【92 高科機械所 10%】
13. Solve $(y \sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$. 【92 中原電機所 10%】
14. Solve $(x^2 - 4)y' + 2xy + 4 = 0$, $y(0) = 0$. 【89 雲科營建所 5%】
15. Solve $(1 - 2xe^{2y})y' - e^{2y} = 0$. 【90 北科冷凍所 5%】
16. Solve $y'[2 - x \cos(xy)] - y \cos(xy) = 0$. 【88 北科電力能源所 15%】

17. Solve $(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$. 【89 中央數學所 7%】
18. Solve $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$, $y(0) = 0$. 【91 台大生物環境所 10%】
19. Solve $(2x + 3y + 4)dx + (3x - 4y - 11)dy = 0$. 【88 北科高分子所 8%】
20. 在何種條件下，方程式 $(x^3 + xy^2)dx + (ax^2y + h(x, y))dy = 0$ exact? 並解其方程式。【91 中央光電所 10%】
21. 下列那些是 exact differential equation?
- (a) $(3x^2 + y^2 + 1)dx + (x^3 + 2xy^2 - 1)dy = 0$
- (b) $(\ln x + y)dx + (\ln x + x)dy = 0$
- (c) $(\tan x - y)dx + (\sec x - y)dy = 0$
- (d) $-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$
- (e) $(2 + x^2y)\frac{dy}{dx} + xy^2 = 0$ 【90 台大物理所 10%】
22. Solve $(e^{2y} - y \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)dy = 0$. 【91 中正電機所 6%】
23. Solve $(xe^y - 1)y' + e^y = 0$. 【91 中原化工所 10%】
24. Solve $xy^4 + e^x + 2x^2y^3y' = 0$. 【88 台科電子所 10%】
25. (a) If $M + Ny' = 0$ has a solution, then it has an integrating factor. Explain!
 (b) Solve $(x + y)dx + x \ln x dy = 0$. 【88 台科電子所 15%】
26. Solve $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right)dx + x^3y^2dy = 0$. 【88 北科生化所 20%】
27. Solve $(2 + x^2y)y' + xy^2 = 0$, $y(1) = 2$. 【87 台科化工所 10%】
28. $[f(x) + g(y)]dx + [h(x) + p(y)]dy = 0$ ，何種條件下，O.D.E. exact? 【88 中央土木所 10%】
29. Solve $(3x - 2y)y' = 3y$. 【87 台大環工所 15%】
30. Solve $e^x \sin y dx + e^x \cos y dy + 3(y dx + x dy) = 0$. 【91 交大電控所 5%】
31. 以下那一個數學式不是 exact differential?

- (a) $2xydx + (x^2 - 1)dy$
- (b) $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy$
- (c) $(\tan x - y)dx - (\sec x + y^2)dy$
- (d) $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx - (1 - \ln x + y)dy$
- (e) $(\tan x - \sin x \sin y)dx + \cos x \cos y dy$

【88 台大電機所 5%】

32. 一微分方程式為 $3x^2 + xy^\alpha - x^2y^{\alpha-1} \frac{dy}{dx} = 0$ 。

(a) 試求參數 α 使其可成為正合微分方程式 (Exact Differential Equation)。

(b) 試根據(a)之結果求微分方程式之解 $y(x)$ 。

【94 台科營建所 15%】