提要 10：解一階 ODE 的第三個方法--更換變數使成變數分離(1)

若微分方程式原來的型式為：

$$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x}) \tag{1}$$

則可做變數變換，將問題化簡為變數可分離的型式。即令：

$$u(x)=\frac{y}{x} \tag{2}$$

再將 $y=ux$ 的關係代回式(1)：

$$\frac{d(ux)}{dx}=f(u) \tag{3}$$

上式中已不再出現應變數 y，並可進一步簡化為：

$$x\frac{du}{dx}+u\frac{dx}{dx}=f(u) \tag{4}$$

其中 $\frac{dx}{dx}=1$，所以式(4)可改寫為：

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u \tag{4'}$$

因此變數 x 與 u 可以分離如下：

$$\frac{1}{f(u)-u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \tag{4''}$$

式(4”)係呈現變數可離的型式，其中等號左邊僅與 u 變數有關，而等號的右邊僅與 x 變數有關。此一類型問題之解析精神與提要 9 所介紹的完全相同，即可安排(4”)對 x 作積分：

$$\int\frac{1}{f(u)-u}\frac{du}{dx}dx=\int\frac{1}{x}dx+C \tag{5}$$

故

$$\int\frac{1}{f(u)-u}du=\ln x+C \tag{5'}$$

只要給予函數 $f(u)$，則上式等號左邊之積分式即可求出。最後再將式(2)所示之關係 $u=\frac{y}{x}$ 代回式(5’)之積分結果，即可完成問題之解析。

範例一
試求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+2y}$，$y(0)=1$ 之解。

【解答】

原式可改寫爲：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+2y}{x}}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}}$$

再令 $u(x)=\dfrac{y}{x}$，即 $y=ux$，代入上式可得：

$$\frac{d(ux)}{dx}=\frac{1-u}{1+2u}$$

因此

$$x\frac{du}{dx}+u\frac{dx}{dx}=\frac{1-u}{1+2u}$$

所以

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-u}{1+2u}-u=\frac{1-u-u-2u^2}{1+2u}=\frac{1-2u-2u^2}{1-2u}$$

故可將上式表爲變數分離的型式如下：

$$\frac{1-2u}{1-2u-2u^2}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

上式等號兩邊直接對 x 作積分，則

$$\int\frac{1+2u}{1-2u-2u^2}\frac{du}{dx}dx=\int\frac{1}{x}dx+C$$

即

$$\int\frac{1+2u}{1-2u-2u^2}du=\ln x+C$$

故

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-2u-2u^2\right)=\ln x+C$$

再將 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，即可求出問題之通解：

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-2\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+C$$

或繼續化簡如下：

$$\ln\left(1-2\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}\right)+2\ln x=-2C$$

$$\Rightarrow\quad \ln\left[x^2\left(1-2\frac{y}{x}-2\frac{y^2}{x^2}\right)\right]=-2C$$

$$\Rightarrow\quad x^2-2xy-2y^2=e^{-2C}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{x^2-2xy-2y^2=\tilde{C}\text{ ，}\tilde{C}=e^{-2C}\ \text{(通解)}}$$

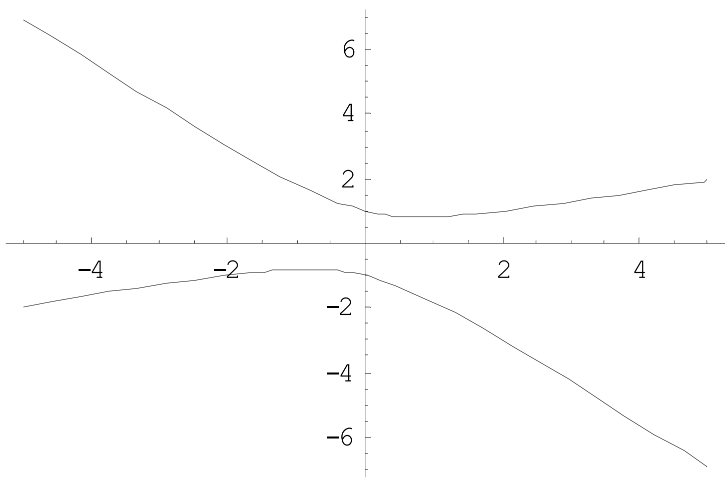
再代入初始條件 $y(0)=1$ 求 $\tilde{C}$ ：

$$0^2-2(0)(1)-2(1)^2=\tilde{C}$$

所以 $\tilde{C}=-2$ ，故滿足初始條件之特解為：

$$\boxed{x^2-2xy-2y^2=-2}$$

若擬以 Mathematica 繪圖表示上式，則先將 $x^2-2xy-2y^2=-2$ 改寫為 $y=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{4+3x^2})$ 與 $y=\frac{1}{2}(-x-\sqrt{4+3x^2})$ ，再輸入繪圖的指令，即 $f_1=Plot=[\frac{1}{2}(-x+\sqrt{4+3x^2}),\{x,-5,5\}]$ ， $f_2=Plot=[\frac{1}{2}(-x-\sqrt{4+3x^2}),\{x,-5,5\}]$ ，個別繪出其圖形後，再輸入 $f_3=Show[f_1,f_2]$ 的指令，將兩圖置於同一圖中即可，如以下所示。



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

習題

1. Solve $(2x+y)dy=(x+2y)dx$. 【88 台大土木所 10%】

2. Solve $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$. 【94 大同電機所 10%】

3. Solve $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$. 【94 師大工教所 15%】

4. Solve $e^x \sin y-2x+\left(e^x \cos y+1\right)y'=0$. 【94 台大生機所 10%】

5. Solve the differential equation $\left(x+y^2\sqrt{y^2-x^2}\right)\frac{dy}{dx}=y-xy\sqrt{y^2-x^2}$. 【92 雲科營建所 10%】

6. $xy'=y+\left(y^2-x^2\right)^{1/2}$, solve $y(x)$. 【94 北科冷凍所 15%】

7. Solve $xyy'=2y^2+4x^2$, $y(2)=4$. 【92 北科自動化所 20%】

8. Solve the differential equation $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(2y^2+x^2\right)$. 【93 高科控制所 6%】

9. Solve $\frac{dy}{dx}=\frac{y-4x}{x-y}$. 【94 清大動機所 10%】

10. Solve the equation $(x+3y)dx-(x-y)dy=0$, with $y(0)=1$, what is $\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1}$. 【93 成大航太所 10%】

11. Find the general solution of $\left(x^2+xy+y^2\right)dx-x^2dy=0$. 【94 中山電機所 15%】

12. Solve the following ordinary differential equation:
$$y^2dx+\left(x^2-xy-y^2\right)dy=0.$$ 【89 北科自動化所 10%】

13. Solve $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$. 【92 中興物理所 10%】

14. Solve $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2-9}$. 【92 台師大研究所 16%】

15. Slove $y'=\frac{(x+y)^2}{x^2}$. 【90 海洋光電所 10%】

16. Solve $\left(2\sqrt{xy}-y\right)dx-xdy=0$.【95 交大機械所 6%】

17. Solve $xy'-y=\dfrac{x^3}{y}e^{y/x}$.【91 北科通訊所 10%，93 師大電機所 14%】

18. Solve $xy'=x\cos\left(y/x\right)+y$.【93 海洋導航所 10%】

19. Solve $2xyy'-y^2+x^2=0$.【91 彰師機電所 10%】

20. Solve $\left(xy\sqrt{x^2-y^2}+x\right)y'=y-x^2\sqrt{x^2-y^2}$.【88 北科冷凍低溫所 5%】

21. Solve $xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$.【90 交大機械所 25%】

22. Solve $y^2\left(3ydx-6xdy\right)=x\left(ydx+2xdy\right)$.【88 北科高分子所 8%】

23. Solve $y'=\dfrac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$.【90 逢甲電機所 15%】

24. Solve $\left(1+2e^{x/y}\right)dx+2e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$.【89 北科冷凍所 5%】

25. Solve $y\left(xy+1\right)dx+x\left(1+xy+x^2y^2\right)dy=0$.【86 中興化工所 6%】

26. Find an implicit solution of the initial-value problem:

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{xy}$, $y\left(1\right)=-\sqrt{2}$.【91 高科環安所 15%，90 中原機械所 15%】

27. Solve $y'+\dfrac{x-2y+3}{2x-4y+5}=0$.【91 成大電信管理所 10%】

28. Solve $y'=\dfrac{y-x+1}{y-x+5}$.【90 中山環工所 15%】

29. Find the general solution for the following differential equation:

$$\left(6x^2-3xy\right)\frac{dy}{dx}+9xy-2y^2=0.$$【89 雲科電機所 10%】

30. Explain why it is always possible to express any homogeneous differential equation $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ in the form $\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ or $\dfrac{dy}{dx}=G\left(\dfrac{x}{y}\right)$.【91 台大環工所 10%】

31. Solve $y' = \frac{x-y}{x+y}$.【88 交大土木所 10%】

32. Solve $\left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$.【87 交大機械所 17%】

33. Slove $2xy'-y=\frac{x^2}{y}$.【90 高科環安所 15%】

34. Slove $xy'=x+y$, $y(1)=1$.【89 雲科環安所 10%】

35. Slove $y^2-6xy+\left(3xy-6x^2\right)y'=0$.【91 雲科電機所 10%】

36. Slove $t^2y'+y^2=ty$.【91 東華材料所 10%】

37. Solve $x^2y'=y^2+2xy$.【89 成大造船所 16%】

38. Solve $\left(x^2+y^2-a^2\right)\left(x+yy'\right)=2xy\left(y+xy'\right)$.【88 北科高分子所 8%】

39. Solve $xy'=y+x^2\tan\frac{y}{x}$.【86 台科高分子所 15%】

40. Solve $\left(x+\sqrt{y^2-xy}\right)y'=y$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$.【88 元智工工所 15%】

41. Solve $y''-3y^2y'=0$, (a) if $x=0$, $y=1$, $y'=1$. (b) if $x=0$, $y=1$, $y'=0$.【台大土木所 15%】

42. Solve $y''-\left(y'\right)^2=0$.【87 北科電力所 15%】

43. Solve the following initial value problem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+4y}{x},\quad y(0)=0.$$【93 台大土木所 6%】

44. Solve the following initial value problem:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+4y}{x},\quad y(0)=1.$$【93 台大土木所 4%】

45. Solve $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+2y^2+3x}{xy}$.【92 交大光電所 15%】