提要 9：解一階 ODE 的第二個方法--變數可分離之 ODE 的解法

若一階 ODE 可表為等號左邊僅與應變數(Dependent Variable) y 有關，而等號右邊僅與自變數(Independent Variable)x 有關，亦即：

$$\boxed{g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)}$$

則可直接對 x 變數作積分，也就是說：

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx+C$$

上式可化簡為：

$$\boxed{\int g(y)dy=\int f(x)dx+C}$$

以下四個範例之自變數則以 t 表示。

範例一
提要 2 之問題為：已知化石中之放射性碳 $_6C^{14}$ 的含量為初始含量的 12.5%，試推估該化石的年齡？已知 $_6C^{14}$ 之半衰期為 5,730 年。所建立之數學模式為 $\frac{dy}{dt}=ky$，$y(0)=y_0$，$y(5{,}730)=\frac{1}{2}y_0$。其中 y 是放射性碳 $_6C^{14}$ 之質量(單位：公克或其他質量單位)，t 表時間(單位：年)，k 為衰減係數，y_0 為放射性物質之初始質量。

【解答】

原式可改寫為變數可分離之型式如下：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k$$

再對自變數 t 直接作積分：

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt=\int kdt+C$$

故

$$\int\frac{1}{y}dy=kt+C$$

即

$$\ln y=kt+C$$

上式再取自然指數的運算：

$$\exp(\ln y)=\exp(kt+C)$$

並令 $\tilde{C}=e^{C}$，則問題之通解可表為：

$$y=\tilde{C}e^{kt}$$

將上式代入問題之初始條件 $y(0)=y_0$ 及半衰期條件 $y(5{,}730)=\frac{1}{2}y_0$，即可求出 $\tilde{C}$ 與 k 這兩個未知常數，即 $\begin{cases} y_0=\tilde{C}e^{0} \\ \frac{y_0}{2}=\tilde{C}e^{5730k} \end{cases}$，因此 $\begin{cases} \tilde{C}=y_0 \\ k=-0.000121 \end{cases}$。故特解為：

$$\boxed{y=y_0e^{-0.000121t}}$$

題目是問，當剩下的 $_6C^{14}$ 是原來的 12.5%(即 0.125 y_0)時，化石的年齡為何？故

$$0.125y_0=y_0e^{-0.000121t}$$

因此 $t=17{,}190$ 年，所以

$$\boxed{\text{化石的年齡為 17,190 年}}$$

Notice:

1. 解一階 ODE 之通解時，只會產生一個積分常數，故僅需一個初始條件，即可求出該積分常數的值。
2. 本題因多了一個衰減係數，故需另找一個條件，即半衰期的條件，以便求出衰減係數 k 之值。

範例二
提要 3 之問題爲：將 100°C 的銅球置於水溫恆保持爲 25°C 之水中，3 分鐘後，銅球的溫度降爲 70°C，試問何時銅球溫度降爲 26°C？所建立之數學模式爲 $\frac{dy}{dt}=k(y-25)$，$y(0)=100\,^{\circ}\mathrm{C}$，$y(3分鐘)=70\,^{\circ}\mathrm{C}$。其中 y 是銅球的溫度(單位：°C)，t 表時間(單位：分鐘)，k 爲冷卻係數。

【解答】

原式可改寫爲變數可分離之型式如下：

$$\frac{1}{y-25}\frac{dy}{dt}=k$$

再對 t 變數作積分：

$$\int\frac{1}{y-25}\frac{dy}{dt}dt=\int kdt+C$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{y-25}dy=kt+C$$

$$\Rightarrow\ln(y-25)=kt+C$$

然後取自然指數的運算：

$$\exp[\ln(y-25)]=\exp(kt+C)$$

$$\Rightarrow y-25=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}$$

令 $\tilde{C}=e^{C}$，所以通解可表爲：

$$y=25+\tilde{C}e^{kt}$$

再代入兩個初始條件 $y(0)=100\,^{\circ}\mathrm{C}$ 與 $y(3分鐘)=70\,^{\circ}\mathrm{C}$ 求兩個未知數 $\tilde{C}$ 與 k：

$$\begin{cases}100=25+\tilde{C}e^{0}\\70=25+\tilde{C}e^{3k}\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\tilde{C}=75\\k=\frac{1}{3}\ln\frac{75-25}{75}=-0.1703\end{cases}$$

因此滿足初始條件之特解爲：

$$y=25+75e^{-01703\,t}$$

當銅球溫度降爲 $26\,^{\circ}C$ 時，上式可表爲：

$$26=25+75\,e^{-01703\,t}$$

所以

$$\boxed{t=-\frac{1}{0.1703}\ln\frac{26-25}{75}=25.35\text{分鐘}}$$

範例三

提要 4 之問題爲：已知 100 加侖的水槽中溶有 20 磅的鹽，若每分鐘有另一種濃度(每一加侖含 2 磅鹽)的鹽水 5 加侖流入水槽中，充分混合後，每分鐘水槽亦排出 5 加侖的鹽水，試求任意時刻 t 水槽中之鹽重。其所建立之數學模式爲 $\frac{dy}{dt}=10-0.05y$，$y(0)=20$。其中 y 表水槽中之鹽重(單位：磅)，t 是時間變數(單位：分鐘)。

【解答】

原式可改寫爲變數可分離之型式如下：

$$\frac{1}{10-0.05y}\frac{dy}{dt}=1$$

再對 t 變數作積分：

$$\int\frac{1}{10-0.05y}\frac{dy}{dt}dt=\int dt+C$$

所以

$$\frac{1}{-0.05}\ln(10-0.05y)=t+C$$
$$\Rightarrow \ln(10-0.05y)=-0.05t-0.05C$$
$$\Rightarrow 10-0.05y=e^{-0.05t-0.05C}$$
$$\Rightarrow 0.05y=10-e^{-0.05C}e^{-0.05t}$$
$$\Rightarrow y=200-20\tilde{C}e^{-0.05t}\text{，}\tilde{C}=e^{-0.05C}$$

再代入初始條件 $y(0)=20$：

$$20=200-20\tilde{C}e^{-0.05(0)}$$

所以

$$\tilde{C}=9$$

即滿足初始條件的特解爲

$$\boxed{y=200-180e^{-0.05t}}$$

利用上式，即可推算出任意時刻 t，水槽中之鹽分重量 y。

範例四

提要 5 之問題爲：若睡前兩小時關掉暖氣系統，當時之室溫爲 28°C，關掉暖氣系統後兩個小時，室溫降爲 26°C，試問六個小時後(暖氣系統已關掉八個小時)，室溫室多少？假設室外溫度恆維持在 0°C。所建立之數學模式爲 $\frac{dy}{dt}=ky$ ， $y(0)=28°C$ ， $y(2)=26°C$ 。其中 y 表室溫(單位：°C)，t 是時間變數(單位：小時)，k 爲冷卻係數。

【解答】

原式可改寫爲變數可分離之微分方程式如下：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k$$

再對 t 變數作積分：

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt=\int kdt+C$$

所以

$$\ln y=kt+C$$

即

$$y=e^{kt+C}=e^{kt}e^{C}$$

或

$$y=\tilde{C}e^{kt}\text{ ， }\tilde{C}=e^{C}\text{(通解)}$$

再代入初始條件 $y(0)=28°C$ 與 $y(2)=26°C$ 求 $\tilde{C}$ 與 k：

$$\begin{cases}28=\tilde{C}e^{k(0)}\\26=\tilde{C}e^{k(2)}\end{cases}$$

所以 $\tilde{C}=28$ ， $k=-0.03705$ 。即：

$$y=28e^{-0.03705t}\text{(特解)}$$

因此 8 小時後，室溫降爲：

$$\boxed{y=28e^{-0.03705(8)}=20.818°C}$$

習題

1. Solve $y'+2xy=xy^2+x$.【93 交大應化所 10%】

2. Solve $x^2(y+1)dx+y^2(x-1)dy=0$.【94 清大微機電所 10%】

3. Solve $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y+y\cos x}{2x+\sin x}$.【92 雲科電機所 10%】

4. Solve $y'+\dfrac{1}{2}y=y^2$.【93 中興環工所 15%】

5. Solve $\cos x\left(e^{2y}-y\right)\dfrac{dy}{dx}=e^y\sin 2x$, $y(0)=0$.【92 淡江土木所 5%】

6. Solve (a) $(1+x)dy-ydx=0$. (b) $xy^4dx+\left(y^2+2\right)e^{-3x}dy=0$.【95 交大機械所 11%】

7. Solve $\tan\theta dr+2rd\theta=0$.【92 中原電機所 10%】

8. Solve $\left(xy\cos y^2\right)y'+2\sin y^2=0$.【90 中央電機所 7%】

9. Solve $2\sin\left(y^2\right)dx+xy\cos\left(y^2\right)dy=0$, $y(2)=\sqrt{\pi/2}$.【91 淡江機械所 15%】

10. Solve $y'+xy^3\sec\dfrac{1}{y^2}=0$.【90 中央環工所 20%】

11. Solve the differential equation $\dfrac{dy}{dx}-2xy^2+16x^3y^2=0$.【91 台大電機所 20%】

12. $y'-\left(\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{2}{x}\right)=0$, Calculate y.【91 淡江環工所 10%】

13. 請解$\left(x^2+1\right)y'+y^2+1=0$，$y(0)=1$。【91 中央光電所 10%】

14. Solve $4yy'=e^{x-y^2}$, $y(1)=2$.【87 成大航太所 5%】

15. Slove $y^{-3}y'+y^{-2}=1$.【88 北科電力能源所 15%】

16. Slove $12xydx+\left(1+x^2\right)dy=0$, $y(2)=5$.【88 北科電力能源所 15%】

17. Slove $\left(y^3-2\right)+2xy^2y'=0$.【90 淡江機械所 15%】

18. Slove $y'+10x^4y^2=0$.【89 台大電機所 20%】

19. Slove $y' + y = y^2$.【89 台大農工所 10%】

20. Slove $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$.【90 中興水保所 10%】

21. Solve $(1+x^2)(1+y^2)dx - xydy = 0$.【88 北科高分子所 8%】

22. Solve $(8P - T^2P)\dfrac{dP}{dT} + (T - TP^2) = 0$.【91 淡江物理所 15%】

23. Solve $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = 0$.【89 北科土木所 10%】

24. Solve the following initial value problem:

$$\frac{dy}{dx} - 2y^2 + 3y = 1,\quad y(0) = 1.$$【93 台大土木所 8%】