提要 8：解一階 ODE 的第一個方法--直接積分法

若一階 ODE 可表為：

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)}$$

則可採用直接積分法推求其解，即上式等號左右兩端直接對 x 作積分：

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx + C$$

因此，問題之通解(General Solution)為：

$$\boxed{y = \int f(x) dx + C}$$

範例一
試解析 $\frac{dy}{dx} = \sin 3x$ 之通解。 (92 學年度第一學期土木系二部土二甲工程數學(一)第一次其中考試題)

【解答】

原式直接對自變數 x 作積分：

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int \sin 3x dx + C$$

所以問題之通解為：

$$\boxed{y = -\frac{\cos 3x}{3} + C}$$

範例二
試解析 $\dfrac{dy}{dx}=x^2$ 之通解。 (92 學年度第一學期土木系一部土二乙工程數學(一)第一次其中考試題)

【解答】

原式直接對自變數 x 作積分：

$$\int \frac{dy}{dx}dx=\int x^2dx+C$$

故問題之通解為：

$$\boxed{y=\frac{x^3}{3}+C}$$

Notice:
若二階 ODE 可表為

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)}$$

則亦可採用直接積分法直接對 x 作兩次積分求其通解。

第一次積分：

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}dx=\int f(x)dx+C_1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1$$

第二次積分：

$$\int \frac{dy}{dx}dx=\int\left[\int f(x)dx+C_1\right]dx+C_2$$

所以

$$\boxed{y=\iint f(x)dxdx+C_1x+C_2}$$

範例三
試解析提要 6 中所建立的數學模式：$\dfrac{d^2y}{dt^2}=9.81$，$y(0)=y_0$，$\dfrac{dy(0)}{dt}=v_0$。

【解答】

本題可採用直接積分法求其通解。此刻自變數是以 t 表示，故要對 t 變數直接積分兩次。

第一次積分：

$$\int \frac{d^2y}{dt^2}dt=\int 9.81dt+C_1$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=9.81\,t+C_1$$

第二次積分：

$$\int \frac{dy}{dt}dt=\int 9.81tdt+C_1t+C_2$$

$$\therefore \boxed{y=4.905\,t^2+C_1t+C_2}$$

上式為問題之通解。再將初始條件 $y(0)=y_0$ 、 $\dfrac{dy(0)}{dt}=v_0$ 代入通解中，即可求出滿足初始條件的特解(Particular Solution)。

因為 $\begin{cases} y_0=4.905(0)^2+C_1(0)+C_2 \\ v_0=9.81(0)+C_1 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} C_1=v_0 \\ C_2=y_0 \end{cases}$。因此，滿足初始條件的特解為：

$$\boxed{y=4.905\,t^2+v_0\,t+y_0}$$

習題

1. Assume that $x^3 + x - 3\sin^2 y - \exp\left(\frac{1}{y}\right) = 20$. Regarding y as a function of x, find $\frac{dy}{dx}$.

   【90 台大電機所 10%】

2. 以下那一個微分方程式不能化簡爲一階的微分方程式（first-order differential equation）？
   (a) $F(x, y', y'') = 0$
   (b) $F(y, y', y'') = 0$
   (c) $F(y', y'', y''') = 0$
   (d) $F(x, y, y'') = 0$
   (e) 以上皆可以化簡爲一階的微分方程式 【87 台大電機所 10%】