提要 400：柯西主值(Cauchy Principal Value)

其實讀者已經在前幾個單元中運用**柯西主值（Cauchy Principal Value）**的概念了，茲以一例說明何謂柯西主值。

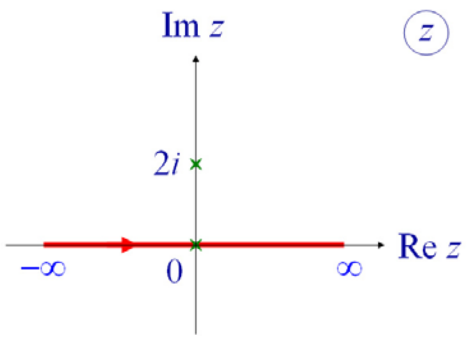
範例一
試以積分式 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2ix} dx$ 為例說明何謂柯西主值。

【說明】

茲先將問題予以編號：

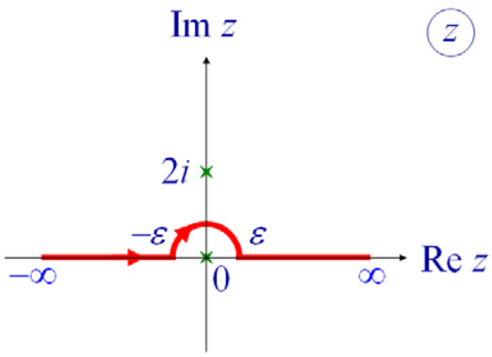
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - 2iz} dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2iz}$ 於 $z = 0$ 與 $z = 2i$ 位置為**奇異點（Singular Point）**，如圖一所示。

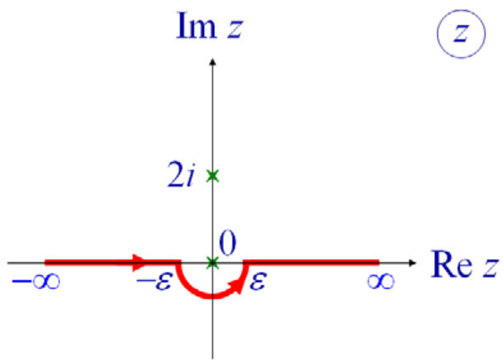


圖一　問題之極點在複數平面上的位置示意圖

因所欲解析之線積分是 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的積分，且 $z = 0$ 為奇異點，故遇到不可解析點 $z = 0$ 時需避開，其避開方式有兩種，如圖二(a)或圖二(b)所示：



圖二(a)　以順鐘向方式繞過奇異點



圖二(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點

由圖二(a)知，其沿水平軸之線積分可表為：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\varepsilon順}}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz \tag{2a}$$

由圖二(b)知，其沿水平軸之線積分可表為：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\varepsilon逆}}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-2iz}dz$與$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz$，當$\varepsilon\to 0$時，其和即為所欲解析之問題$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz$，亦即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz \tag{3}$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-2iz}dz+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-2iz}dz\right) \tag{3'}$$

式(3)或式(3’)即稱之為柯西主值（Cauchy Principal Value）。不過廣義之柯西主值並沒有限制其積分之上下限為$\pm\infty$，也沒有限定極點一定要是$z=0$。關於積分之上下限與極點之位置，本例僅是一個特例罷了！