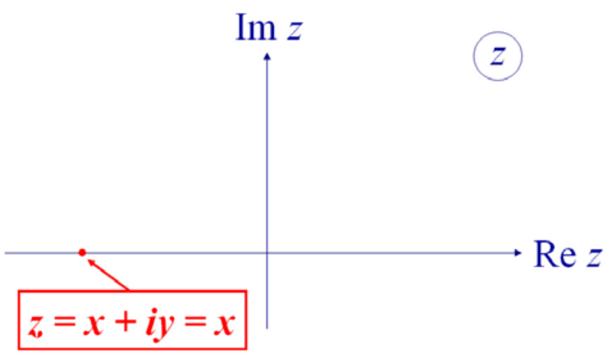
提要 398：極點（Pole）落在實數軸上的線積分問題(4)

作者擬以五個範例說明**極點（Pole）**落在實數軸上時之積分方式，以下為第四個應用範例之說明。

範例一
試推求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2-ix}dx$ 之積分值。

【解答】

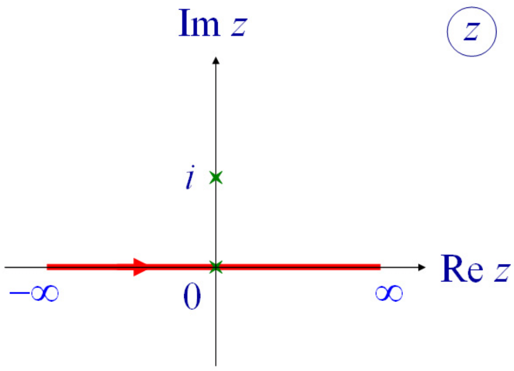


圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故 $z=x$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。因此，原式可改寫為：

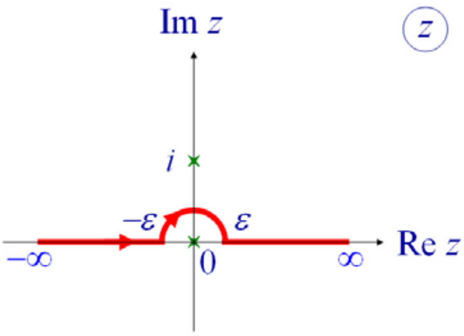
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z)=\frac{1}{z^2-iz}$ 於 $z=0$ 與 $z=i$ 位置為**奇異點（Singular Point）**，如圖二所示。

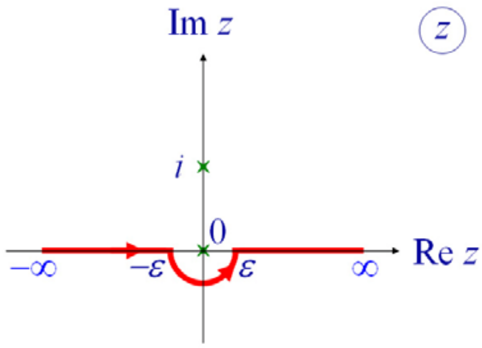


圖二　問題之極點在複數平面上的位置示意圖

因所欲解析之線積分是 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的積分，且 $z=0$ 為奇異點，故遇到不可解析點 $z=0$ 時需避開，其避開方式有兩種，如圖三(a)或圖三(b)所示：

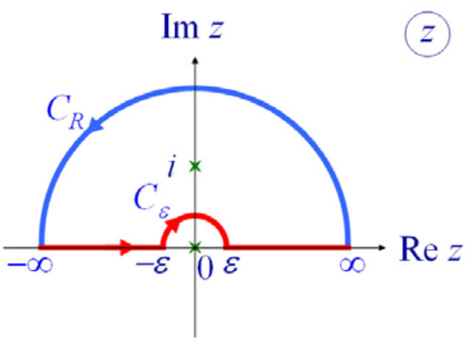


圖三(a)　以順鐘向方式繞過奇異點

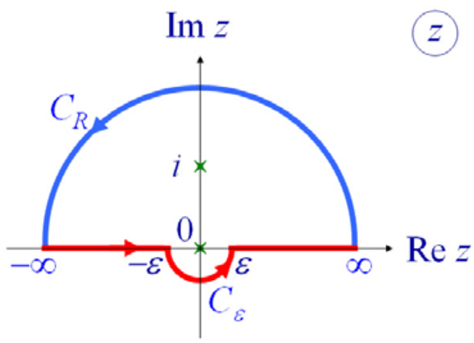


圖三(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點

茲考慮如圖四(a)與四(b)之封閉路線積分方式：



圖四(a)　C_ε以順鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分



圖四(b)　C_ε以逆鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分

由圖四(a)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz=\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz \quad (2a)$$

由圖四(b)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz=\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz \quad (2b)$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-iz}dz$與$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz$，當$\varepsilon\to 0$時，其和即為所欲解析之問題$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz$，亦即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{z^2-iz}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz \quad (3)$$

因此，若採用圖四(a)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz=\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順}\frac{1}{z^2-iz}dz \quad (4a)$$

若採用圖四(b)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz=\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{1}{z^2-iz}dz \quad (4b)$$

以下說明式(4a)與式(4b)之解析過程。

■ 關於 $\int_{C_R逆} \frac{1}{z^2 - iz} dz$ 的解析

式(4a)與式(4b)中所示積分式 $\int_{C_R逆} \frac{1}{z^2 - iz} dz$ 的積分值均為零，其證明過程如以下所示：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R逆} \frac{1}{z^2 - iz} dz &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^2 - i(Re^{i\theta})} d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2 e^{i2\theta} - iRe^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{i}{Re^{i\theta} - i} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \lim_{R\to\infty} \left(\frac{i}{Re^{i\theta} - i} \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{i}{(\infty) e^{i\theta} - i} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{i}{(\infty)(\text{有限值}) - i} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (0) d\theta \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

■ 關於 $\oint_{C逆} \frac{1}{z^2 - iz} dz$ 的解析

若採用圖四(a)之積分方式，因封閉積分路徑內有一單極點（Simple Pole）$z = i$，故可引用單極點之計算公式推求其積分值：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z) = p(z)/q(z)$，且 $p(z_0) \neq 0$。基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_{C逆} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2 - iz} \\
&= 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^2 - iz)'} \\
&= 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{1}{2z - i} \\
&= 2\pi i \frac{1}{2(i) - i} \\
&= 2\pi i \frac{1}{i} \\
&= 2\pi
\end{aligned} \tag{6a}
$$

若採用圖四(b)所示之積分方式，則其封閉積分路徑內有兩個極點 $z = i$ 與 $z = 0$，故需引用殘值定理（Residue Theorem），推求封閉路線積分之積分值。已知 $z = i$ 與 $z = 0$ 為落在封閉積分路徑內之單極點，故可引用單極點之計算公式：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z) = p(z)/q(z)$，且 $p(z_0) \neq 0$。基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_{C逆} f(z)dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2 - iz} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2 - iz} \\
&= 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^2 - iz)'} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{(z^2 - iz)'} \\
&= 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{1}{2z - i} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{2z - i} \\
&= 2\pi i \frac{1}{2(i) - i} + 2\pi i \frac{1}{2(0) - i} \\
&= 2\pi i \frac{1}{i} + 2\pi i \frac{1}{-i} \\
&= 2\pi - 2\pi \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6b}
$$

■ 關於 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{1}{z^2-iz}dz$ 與 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{1}{z^2-iz}dz$ 的解析

C_ε 係圍繞單極點 $z=0$ 之半圓，由之前單元的討論知：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{1}{z^2-iz}dz=-\pi i\,\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0}\frac{1}{z^2-iz}=-\pi i\frac{1}{(z^2-iz)'}\bigg|_{z=0}=-\pi i\frac{1}{2z-i}\bigg|_{z=0}=-\pi i\frac{1}{2(0)-i}=\pi \quad (7a)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{1}{z^2-iz}dz=\pi i\,\mathop{\mathrm{Res}}_{z=0}\frac{1}{z^2-iz}=\pi i\frac{1}{(z^2-iz)'}\bigg|_{z=0}=\pi i\frac{1}{2z-i}\bigg|_{z=0}=\pi i\frac{1}{2(0)-i}=-\pi \quad (7b)$$

根據式(5)、式(6a)、式(6b)、式(7a)與式(7b)，則式(4a)與式(4b)所示問題之解即可推導出。由式(4a)知：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz&=\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{1}{z^2-iz}dz\\&=2\pi-0-\pi\\&=\pi\end{aligned}} \quad (8a)$$

由式(4b)知：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2-iz}dz&=\oint_{C逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\int_{C_R逆}\frac{1}{z^2-iz}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{1}{z^2-iz}dz\\&=0-0-(-\pi)\\&=\pi\end{aligned}} \quad (8b)$$

式(8a)與式(8b)是分別根據圖四(a)與圖四(b)所選取積分路徑作積分後所得結果，由此可知，這兩種積分方式所推求出之結果完全一致。以上係問題之解析過程。