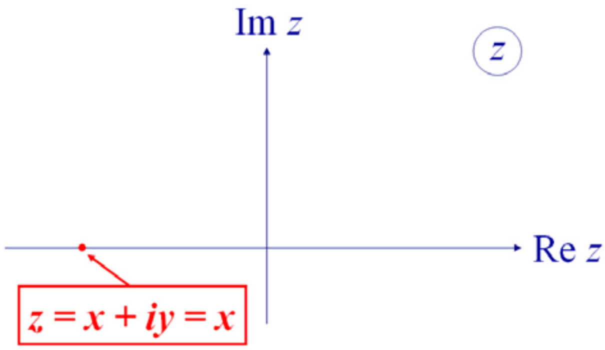
提要 397：極點（Pole）落在實數軸上的線積分問題(3)

作者擬以五個範例說明**極點（Pole）**落在實數軸上時之積分方式，以下為第三個應用範例之說明。

範例一
試求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}dx$ 之積分值。

【解答】

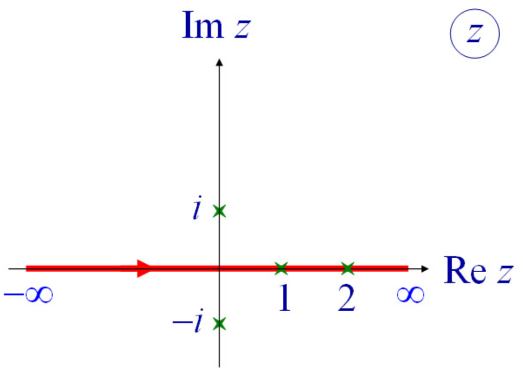


圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故 $z = x$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z = x + iy$，其中 x 稱為 ***z* 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 ***z* 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為0，故 $z = x + iy = x + i(0) = x$。因此，原式可改寫為：

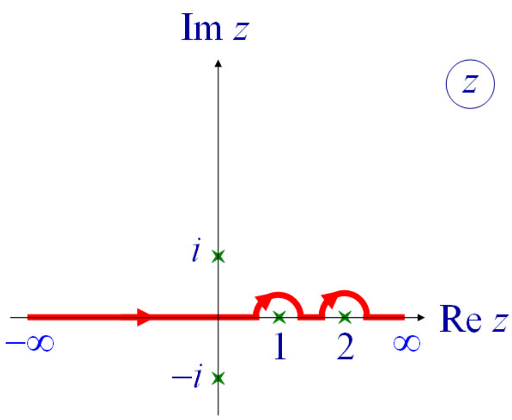
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z)=\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$ 於 $z=1$、$z=2$、$z=i$、$z=-i$ 位置為**奇異點（Singular Point）**，如圖二所示。

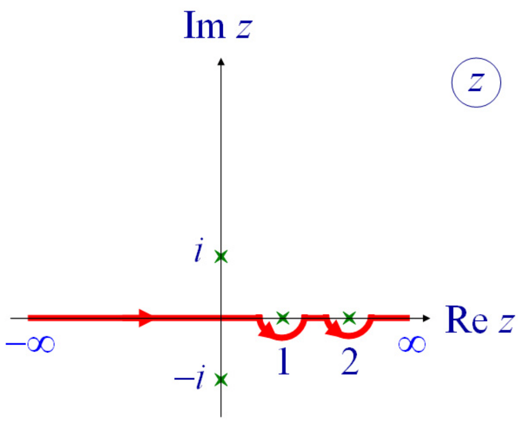


圖二　問題之極點在複數平面上的位置示意圖

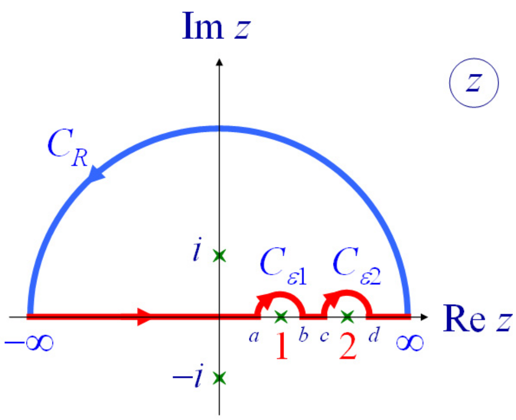
因所欲解析之線積分是$-\infty$至$+\infty$的積分，且$z=1$與$z=2$為落在實數軸上之奇異點，故遇到不可解析點$z=1$與$z=2$時需避開，其避開方式有兩種，如圖三(a)或圖三(b)所示：



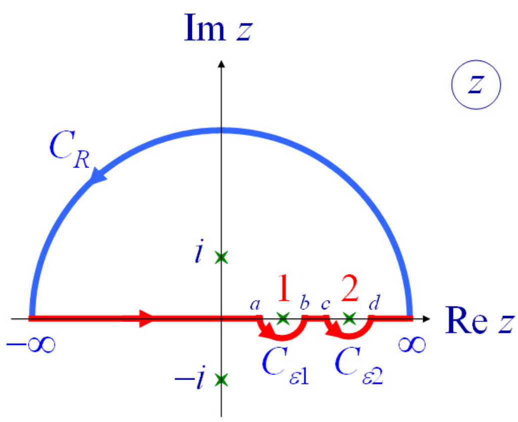
圖三(a)　以順鐘向方式繞過奇異點



圖三(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點



圖四(a)　$C_{\varepsilon 1}$與$C_{\varepsilon 2}$以順鐘向方式繞過奇異點$z=1$與$z=2$作環積分



圖四(b)　$C_{\varepsilon 1}$與$C_{\varepsilon 2}$以逆鐘向方式繞過奇異點$z=1$與$z=2$作環積分

茲考慮如圖四(a)與四(b)之封閉路線積分方式。由圖四(a)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = \int_{C_R逆} f(z)dz + \int_{-\infty}^{a} f(z)dz + \int_{C_{\varepsilon 1}順} f(z)dz + \int_{b}^{c} f(z)dz + \int_{C_{\varepsilon 2}順} f(z)dz + \int_{d}^{\infty} f(z)dz \quad (2a)$$

其中 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 3z + 2)(z^2 + 1)}$。又由圖四(b)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = \int_{C_R逆} f(z)dz + \int_{-\infty}^{a} f(z)dz + \int_{C_{\varepsilon 1}逆} f(z)dz + \int_{b}^{c} f(z)dz + \int_{C_{\varepsilon 2}逆} f(z)dz + \int_{d}^{\infty} f(z)dz \quad (2b)$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現 $\int_{-\infty}^{a} f(z)dz$、$\int_{b}^{c} f(z)dz$ 與 $\int_{d}^{\infty} f(z)dz$，當所選取之半圓 $C_{\varepsilon 1}$ 與 $C_{\varepsilon 2}$ 之半徑 $\varepsilon 1$ 與 $\varepsilon 2$ 很微小時，其和即為所欲解析之問題 $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$，亦即：

$$\int_{-\infty}^{a} f(z)dz + \int_{b}^{c} f(z)dz + \int_{d}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \quad (3)$$

因此，若採用圖四(a)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 1}順} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 2}順} f(z)dz \quad (4a)$$

若採用圖四(b)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 1}逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 2}逆} f(z)dz \quad (4b)$$

式(4a)與式(4b)中之 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 3z + 2)(z^2 + 1)}$。以下說明式(4a)與式(4b)之解析過程。

■ 關於 $\int_{C_{R逆}} f(z)dz$ 、 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$ 的解析

式(4a)與式(4b)中所示積分式 $\int_{C_{R逆}} f(z)dz$ 的積分值均為零，其證明過程如以下所示：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_{R逆}} f(z)dz &= \int_{C_{R逆}} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{[(Re^{i\theta})^2-3(Re^{i\theta})+2][(Re^{i\theta})^2+1]}d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2e^{i2\theta}-3Re^{i\theta}+2)(R^2e^{i2\theta}+1)}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{[Re^{i2\theta}-3e^{i\theta}+(2/R)](R^2e^{i2\theta}+1)}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{ie^{i\theta}}{[Re^{i2\theta}-3e^{i\theta}+(2/R)](R^2e^{i2\theta}+1)}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{[(\infty)e^{i2\theta}-3e^{i\theta}+(2/\infty)][(\infty)^2e^{i2\theta}+1]}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{[\infty-3e^{i\theta}+0][(\infty)e^{i2\theta}+1]}d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (0)d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

■ 關於 $\oint_{C逆} f(z)dz$ 、 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$ 的解析

若採用圖四(a)之積分方式，因封閉積分路徑內有一單極點（Simple Pole）$z=i$，故可引用單極點之計算公式推求其積分值：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z)=p(z)/q(z)$，且 $p(z_0)\neq 0$。基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_{C逆} f(z)dz &= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)} \\
&= 2\pi i \frac{1}{(2i-3)(i^2+1)+(i^2-3i+2)(2i)} \\
&= 2\pi i \frac{1}{(2i-3)(-1+1)+(-1-3i+2)(2i)} \\
&= 2\pi i \frac{1}{(1-3i)(2i)} \\
&= \pi \frac{1}{1-3i} \\
&= \pi \frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)} \\
&= \pi \frac{1+3i}{10}
\end{aligned}
\tag{6a}
$$

若採用圖四(b)所示之積分方式，則其封閉積分路徑內有三個極點 $z=i$ 、 $z=1$ 與 $z=2$，故需引用殘值定理（Residue Theorem），推求封閉路線積分之積分值。已知 $z=i$ 、 $z=1$ 與 $z=2$ 為落在封閉積分路徑內之單極點，故可引用單極點之計算公式：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z)=p(z)/q(z)$，且 $p(z_0)\neq 0$。基於此，可知：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2} f(z)$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 2} \frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 2} \frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2i-3)(i^2+1)+(i^2-3i+2)(2i)}$$

$$+ 2\pi i \frac{1}{[2(1)-3][(1)^2+1]+[(1)^2-3(1)+2][2(1)]}$$

$$+ 2\pi i \frac{1}{[2(2)-3][(2)^2+1]+[(2)^2-3(2)+2][2(2)]}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2i-3)(-1+1)+(-1-3i+2)(2i)}$$

$$+ 2\pi i \frac{1}{[-1][2]+[0][2]} + 2\pi i \frac{1}{[1][5]+[0][4]}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(1-3i)(2i)} + 2\pi i \frac{1}{-2} + 2\pi i \frac{1}{5}$$

$$= \pi \frac{1}{1-3i} - \pi i + \frac{2}{5}\pi i$$

$$= \pi \frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)} - \frac{3}{5}\pi i$$

$$= \pi \frac{1+3i}{10} - \frac{3}{5}\pi i \qquad \text{(6b)}$$

$$= \pi \frac{1-3i}{10}$$

■ 關於 $\int_{C_{\varepsilon 1逆}} f(z)dz$ 與 $\int_{C_{\varepsilon 1順}} f(z)dz$ 、 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$ 的解析

$C_{\varepsilon 1}$ 係圍繞單極點 $z=1$ 之半圓，由之前單元的討論知：

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\varepsilon 1順}} f(z)dz &= \int_{C_{\varepsilon 1順}} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \\
&= -\pi i \lim_{z\to 1}\frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'} \\
&= -\pi i \lim_{z\to 1}\frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)} \\
&= -\pi i \frac{1}{[2(1)-3][(1)^2+1]+[(1)^2-3(1)+2][2(1)]} \\
&= -\pi i \frac{1}{(-1)(2)+(0)(2)} \\
&= -\pi i \frac{1}{-2} \\
&= \frac{\pi}{2}i
\end{aligned} \tag{7a}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\varepsilon 1逆}} f(z)dz &= \int_{C_{\varepsilon 1逆}} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \\
&= \pi i \lim_{z\to 1}\frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'} \\
&= \pi i \lim_{z\to 1}\frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)} \\
&= \pi i \frac{1}{[2(1)-3][(1)^2+1]+[(1)^2-3(1)+2][2(1)]} \\
&= \pi i \frac{1}{(-1)(2)+(0)(2)} \\
&= \pi i \frac{1}{-2} \\
&= -\frac{\pi}{2}i
\end{aligned} \tag{7b}$$

■ 關於 $\int_{C_{\varepsilon 2}逆} f(z)dz$ 與 $\int_{C_{\varepsilon 2}順} f(z)dz$ 、 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$ 的解析

$C_{\varepsilon 2}$ 係圍繞單極點 $z=2$ 之半圓，由之前單元的討論知：

$$\begin{aligned}\int_{C_{\varepsilon 2}順} f(z)dz &= \int_{C_{\varepsilon 2}順} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \\ &= -\pi i\lim_{z\to 2}\frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'} \\ &= -\pi i\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)} \\ &= -\pi i\frac{1}{[2(2)-3][(2)^2+1]+[(2)^2-3(2)+2][2(2)]} \\ &= -\pi i\frac{1}{(1)(5)+(0)(4)} \\ &= -\pi i\frac{1}{5} \\ &= -\frac{\pi}{5}i\end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_{\varepsilon 2}逆} f(z)dz &= \int_{C_{\varepsilon 2}逆} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}dz \\ &= \pi i\lim_{z\to 2}\frac{1}{[(z^2-3z+2)(z^2+1)]'} \\ &= \pi i\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2z-3)(z^2+1)+(z^2-3z+2)(2z)} \\ &= \pi i\frac{1}{[2(2)-3][(2)^2+1]+[(2)^2-3(2)+2][2(2)]} \\ &= \pi i\frac{1}{(1)(5)+(0)(4)} \\ &= \pi i\frac{1}{5} \\ &= \frac{\pi}{5}i\end{aligned} \tag{8b}$$

根據式(5)、式(6a)、式(6b)、式(7a)、式(7b)、式(8a)與式(8b)，則式(4a)與式(4b)所示問題之解即可推導出。由式(4a)知：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz &= \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 1}順} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 2}順} f(z)dz \\
&= \pi\frac{1+3i}{10} - 0 - \frac{\pi}{2}i - \left(-\frac{\pi}{5}i\right) \\
&= \pi\frac{1+3i}{10} - \frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{5}i \\
&= \pi\frac{1+3i-5i+2i}{10} \\
&= \frac{1}{10}\pi
\end{aligned}
\tag{9a}
$$

由式(4b)知：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz &= \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 1}逆} f(z)dz - \int_{C_{\varepsilon 2}逆} f(z)dz \\
&= \pi\frac{1-3i}{10} - 0 - \left(-\frac{\pi}{2}i\right) - \frac{\pi}{5}i \\
&= \pi\frac{1-3i}{10} + \frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{5}i \\
&= \pi\frac{1-3i+5i-2i}{10} \\
&= \frac{1}{10}\pi
\end{aligned}
\tag{9b}
$$

式(9a)與式(9b)是分別根據圖四(a)與圖四(b)所選取積分路徑作積分後所得結果，由此可知，這兩種積分方式所推求出之結果完全一致。