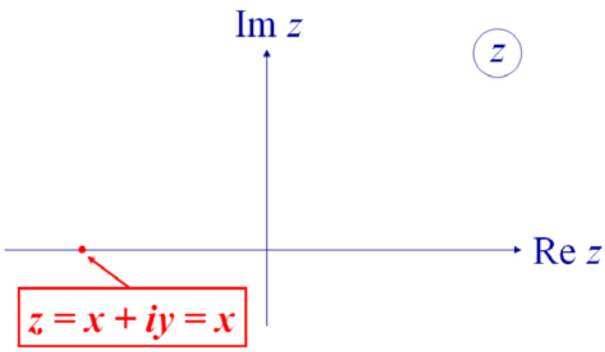
提要 396：極點（Pole）落在實數軸上的線積分問題(2)

作者擬以五個範例說明**極點（Pole）**落在實數軸上時之積分方式，以下為第二個應用範例之說明。

範例一
試證明 $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$。

【證明】



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為 0，故 $z=x$

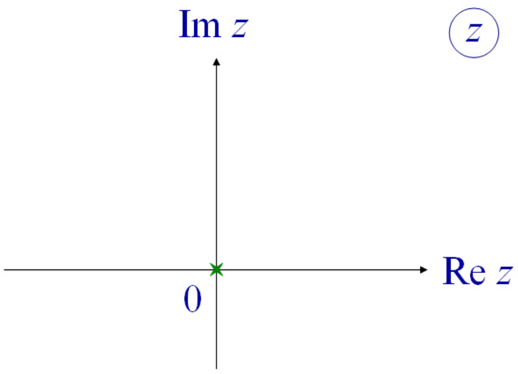
由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。因此，原式可改寫為：

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 為**偶函數（Even Function）**，故式(1)之積分方式可改寫為：

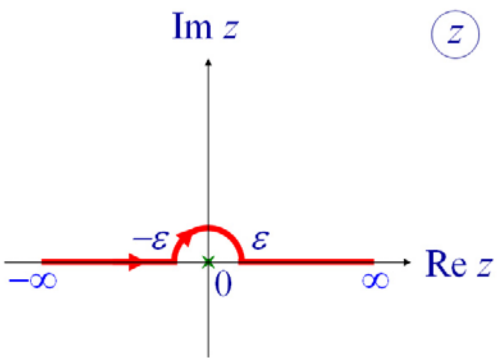
$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \tag{1'}$$

由上式知，積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz$ 之積分值，即為問題 $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$ 之解。觀察積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz$ 知，$z=0$ 為落在實數軸上之極點，如圖二所示。

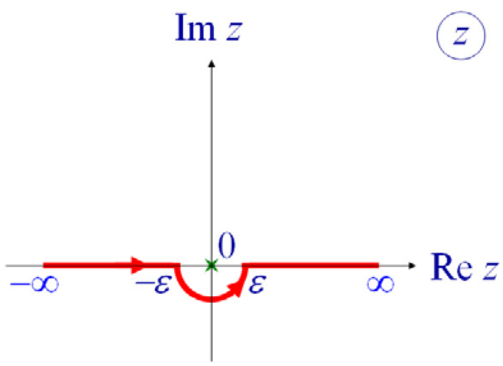


圖二　落在水平軸上之極點 $z=0$ 的示意圖

因所欲解析之線積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz$ 是 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的積分，且 $z=0$ 為奇異點，故遇到不可解析點 $z=0$ 時需避開，其避開方式有兩種，如圖三(a)或圖三(b)所示：

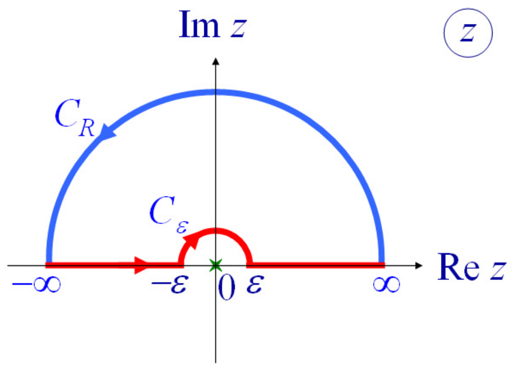


圖三(a)　以順鐘向方式繞過奇異點

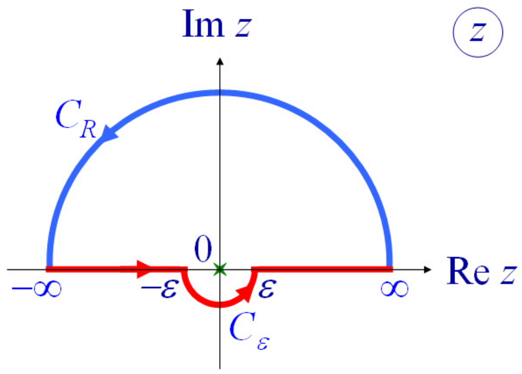


圖三(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點

茲考慮如圖四(a)與四(b)之封閉路線積分方式：



圖四(a)　C_ε以順鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分



圖四(b)　C_ε以逆鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分

由圖四(a)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{\sin z}{2z}dz=\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz \qquad (2a)$$

由圖四(b)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{\sin z}{2z}dz=\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz \qquad (2b)$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz$ 與 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz$，當 $\varepsilon\to 0$ 時，其和即為所欲解析之問題 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz$，亦即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz \qquad (3)$$

因此，若採用圖四(a)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\oint_{C逆}\frac{\sin z}{2z}dz-\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{\sin z}{2z}dz \quad (4a)$$

若採用圖四(b)所示之積分路徑，則：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{2z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\oint_{C逆}\frac{\sin z}{2z}dz-\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{\sin z}{2z}dz \quad (4b)$$

另外，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{iz}}{2z}\right\}dz=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{2z}dz\right\}$，所以式(4a)與式(4b)可再改寫為：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\mathrm{Im}\left\{\oint_{C逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{e^{iz}}{2z}dz\right\}} \quad (5a)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz=\mathrm{Im}\left\{\oint_{C逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz\right\}} \quad (5a)$$

以下說明式(5a)與式(5b)之解析過程。

■ 關於 $\int_{C_R逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz$ 的解析

式(5a)與式(5b)中所示積分式 $\int_{C_R逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz$ 的積分值均為零，其證明過程如以下所示：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R逆} \frac{\sin z}{2z} dz &= \mathrm{Im}\left\{ \int_{C_R逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\exp(iRe^{i\theta})}{2Re^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\exp[iR(\cos\theta + i\sin\theta)]}{2Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \exp(iR\cos\theta - R\sin\theta)(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \exp(iR\cos\theta)\exp(-R\sin\theta)(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(R\cos\theta) + i\sin(R\cos\theta)]\exp(-R\sin\theta)(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{\pi} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \{[\cos(R\cos\theta) + i\sin(R\cos\theta)]\exp(-R\sin\theta)\}(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \{[(\text{有限值}) + i(\text{有限值})](0)\}(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{ \int_0^{\pi} (0)(id\theta) \right\} \\
&= \mathrm{Im}\{0\} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

■ 關於 $\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz$ 的解析

若採用圖四(a)之積分方式，因封閉積分路徑內並無任何極點（Pole），故可由柯西積分定理（Cauchy Integral Theorem）知，其封閉路線積分之積分值為零，亦即：

$$\boxed{\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz = 0} \tag{7a}$$

若採用圖四(b)所示之積分方式，因其封閉積分路徑內有極點，故需引用殘值定理（Residue Theorem），推求封閉路線積分之積分值。已知 $z=0$ 為落在封閉積分路徑內之單極點（Simple Pole），故可引用單極點之計算公式：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z)=p(z)/q(z)$，且 $p(z_0)\neq 0$。基於此，可知：

$$\boxed{\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{2z} dz = 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{(2z)'}\right|_{z=0} = 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{2}\right|_{z=0} \pi i e^{0} = \pi i} \tag{7b}$$

■ 關於 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_{\varepsilon\text{逆}}}\frac{e^{iz}}{2z}dz$ 與 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_{\varepsilon\text{順}}}\frac{e^{iz}}{2z}dz$ 的解析

C_ε 係圍繞單極點 $z=0$ 之半圓，由之前單元的討論知：

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_{\varepsilon\text{順}}}\frac{e^{iz}}{2z}dz=-\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{2z}=-\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(2z)'}\right|_{z=0}=-\pi i\left.\frac{e^{iz}}{2}\right|_{z=0}=-\frac{\pi i e^{i(0)}}{2}=-\frac{\pi}{2}i} \tag{8a}$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_{\varepsilon\text{逆}}}\frac{e^{iz}}{2z}dz=\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{2z}=\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(2z)'}\right|_{z=0}=\pi i\left.\frac{e^{iz}}{2}\right|_{z=0}=\frac{\pi i e^{i(0)}}{2}=\frac{\pi}{2}i} \tag{8b}$$

根據式(1’)、式(6)、式(7a)、式(7b)、式(8a)與式(8b)，則式(5a)與式(5b)所示問題之解即可推導出。由式(5a)知：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz\\&=\mathrm{Im}\left\{\oint\limits_{C\text{逆}}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\int\limits_{C_R\text{逆}}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{C_{\varepsilon\text{順}}}\frac{e^{iz}}{2z}dz\right\}\\&=\mathrm{Im}\left\{0-0-\left(-\frac{\pi}{2}i\right)\right\}\\&=\mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}} \tag{9a}$$

由式(5b)知：

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{2z}dz \\
&= \mathrm{Im}\left\{\oint_{C逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{e^{iz}}{2z}dz\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\pi i-0-\frac{\pi}{2}i\right\} \\
&= \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{2}i\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{9b}
$$

式(9a)與式(9b)是分別根據圖四(a)與圖四(b)所選取積分路徑作積分後所得結果，由此可知，這兩種積分方式所推求出之結果完全一致。以上係問題之證明過程。