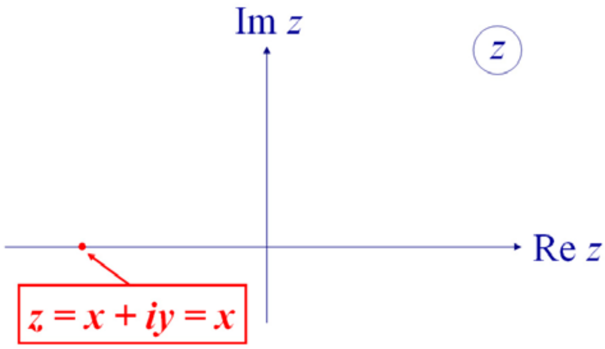
提要 395：極點（Pole）落在實數軸上的線積分問題(1)

作者擬以五個範例說明**極點（Pole）**落在實數軸上時之積分方式，以下為第一個應用範例之說明。

範例一
試證明 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$ 。

【證明】

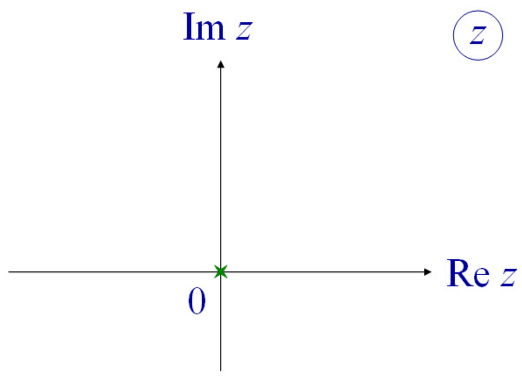


圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故 $z=x$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。因此，原式可改寫為：

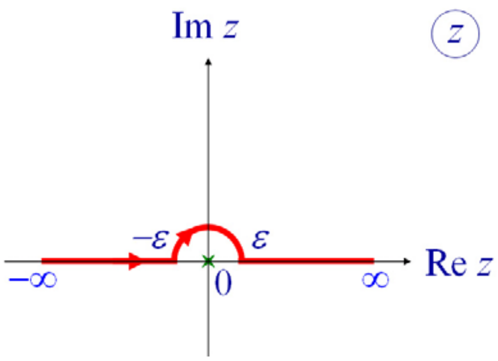
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 於 $z=0$ 位置為**奇異點（Singular Point）**，如圖二所示。

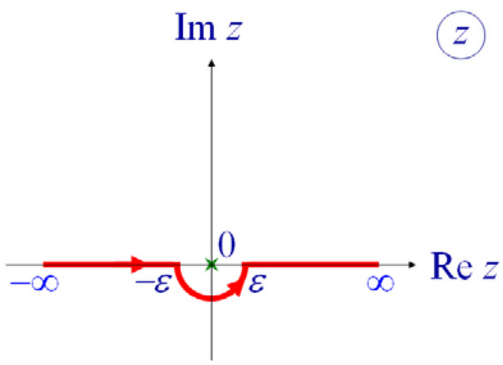


圖二　落在水平軸上之極點 $z=0$ 的示意圖

因所欲解析之線積分是 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的積分，且 $z=0$ 為奇異點，故遇到不可解析點 $z=0$ 時需避開，其避開方式有兩種，如圖三(a)或圖三(b)所示：

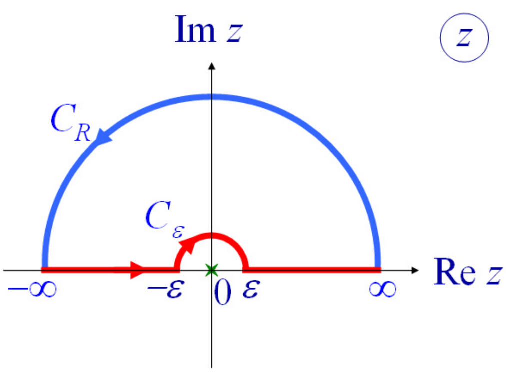


圖三(a)　以順鐘向方式繞過奇異點

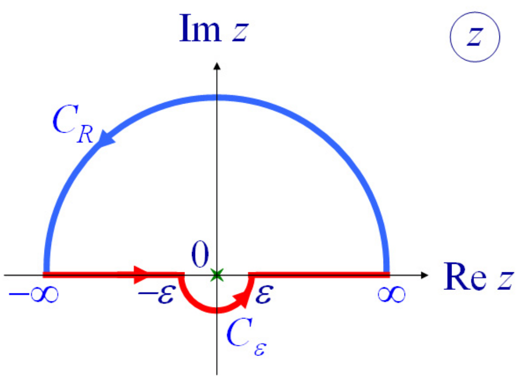


圖三(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點

茲考慮如圖四(a)與四(b)之封閉路線積分方式：



圖四(a)　C_ε以順鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分



圖四(b)　C_ε以逆鐘向方式繞過奇異點 $z=0$ 作環積分

由圖四(a)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{\sin z}{z}dz=\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \qquad (2a)$$

由圖四(b)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆}\frac{\sin z}{z}dz=\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \qquad (2b)$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz$與$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$，當$\varepsilon\to 0$時，其和即為所欲解析之問題$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz$，亦即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \qquad (3)$$

因此，若採用圖四(a)所示之積分路徑，則：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\oint_{C逆}\frac{\sin z}{z}dz-\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順}\frac{\sin z}{z}dz} \qquad (4a)$$

若採用圖四(b)所示之積分路徑，則：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\sin z}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\oint_{C逆}\frac{\sin z}{z}dz-\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆}\frac{\sin z}{z}dz} \qquad (4b)$$

另外，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{iz}}{z}\right\}dz=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}$，所以式(4a)與式(4b)可再改寫為：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\mathrm{Im}\left\{\oint_{C逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}} \tag{5a}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\mathrm{Im}\left\{\oint_{C逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}} \tag{5a}$$

以下說明式(5a)與式(5b)之解析過程。

■ 關於 $\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{z}dz$ 的解析

式(5a)與式(5b)中所示積分式 $\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{z}dz$ 的積分值均為零，其證明過程如以下所示：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R逆}\frac{\sin z}{z}dz &= \mathrm{Im}\left\{\int_{C_R逆}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{i\theta})}{Re^{i\theta}}d(Re^{i\theta})\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{\exp[iR(\cos\theta+i\sin\theta)]}{Re^{i\theta}}(iRe^{i\theta}d\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \exp(iR\cos\theta-R\sin\theta)(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \exp(iR\cos\theta)\exp(-R\sin\theta)(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi [\cos(R\cos\theta)+i\sin(R\cos\theta)]\exp(-R\sin\theta)(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\int_0^\pi \lim_{R\to\infty}\{[\cos(R\cos\theta)+i\sin(R\cos\theta)]\exp(-R\sin\theta)\}(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\int_0^\pi \{[(\text{有限值})+i(\text{有限值})](0)\}(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\left\{\int_0^\pi (0)(id\theta)\right\}\\
&= \mathrm{Im}\{0\}\\
&= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

■ 關於 $\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{z} dz$ 的解析

若採用圖四(a)之積分方式，因封閉積分路徑內並無任何極點（Pole），故可由柯西積分定理（Cauchy Integral Theorem）知，其封閉路線積分之積分值為零，亦即：

$$\boxed{\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0} \tag{7a}$$

若採用圖四(b)所示之積分方式，因其封閉積分路徑內有極點，故需引用殘值定理（Residue Theorem），推求封閉路線積分之積分值。已知 $z = 0$ 為落在封閉積分路徑內之單極點（Simple Pole），故可引用單極點之計算公式：$\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$，其中 $f(z) = p(z)/q(z)$，且 $p(z_0) \neq 0$。基於此，可知：

$$\boxed{\oint_{C逆} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \frac{e^{iz}}{(z)'}\bigg|_{z=0} = 2\pi i e^{iz}\big|_{z=0} 2\pi i e^{0} = 2\pi i} \tag{7b}$$

■ 關於 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz$ 與 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{e^{iz}}{z}dz$ 的解析

C_ε 係圍繞單極點 $z=0$ 之半圓，由之前單元的討論知：

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}=-\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z)'}\right|_{z=0}=-\pi i\left.\frac{e^{iz}}{1}\right|_{z=0}=-\pi i e^{i(0)}=-\pi i} \tag{8a}$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz=\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}=\pi i\left.\frac{e^{iz}}{(z)'}\right|_{z=0}=\pi i\left.\frac{e^{iz}}{1}\right|_{z=0}=\pi i e^{i(0)}=\pi i} \tag{8b}$$

根據式(6)、式(7a)、式(7b)、式(8a)與式(8b)，則式(5a)與式(5b)所示問題之解即可推導出。由式(5a)知：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz&=\operatorname{Im}\left\{\oint_{C 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}\\&=\operatorname{Im}\{0-0-(-\pi i)\}\\&=\operatorname{Im}\{\pi i\}\\&=\pi\end{aligned}} \tag{9a}$$

由式(5b)知：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz&=\operatorname{Im}\left\{\oint_{C 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\int_{C_R 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆}\frac{e^{iz}}{z}dz\right\}\\&=\operatorname{Im}\{2\pi i-0-\pi i\}\\&=\operatorname{Im}\{\pi i\}\\&=\pi\end{aligned}} \tag{9b}$$

式(9a)與式(9b)是分別根據圖四(a)與圖四(b)所選取積分路徑作積分後所得結果，由此可知，這兩種積分方式所推求出之結果完全一致。以上係問題之證明過程。