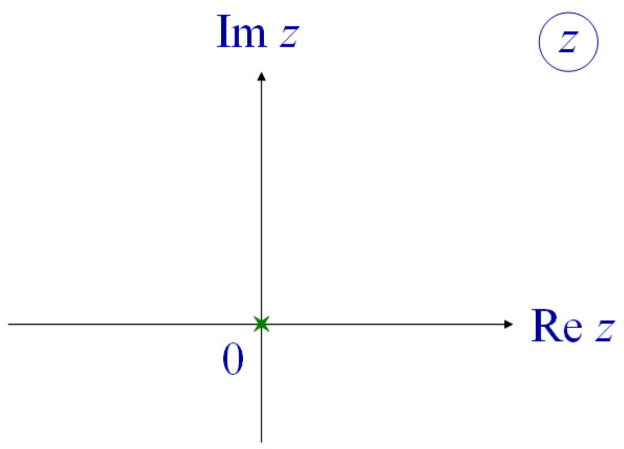
提要 394：極點（Pole）落在實數軸上的線積分

另有一類的線積分問題看起來似乎較為麻煩，這一類問題之**極點（Pole）**會落在實數軸上，例如以下所示線積分問題即是：

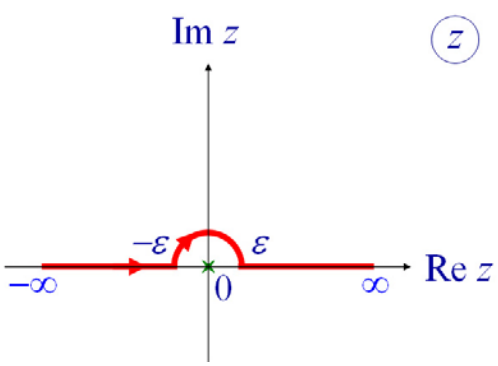
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz \tag{1}$$

其中積分函數 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 於 $z=0$ 位置為**奇異點（Singular Point）**，如圖一所示。

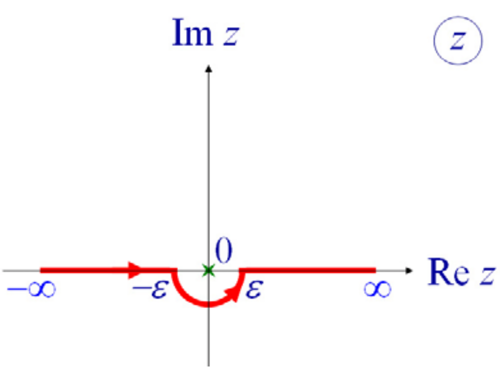


圖一　落在水平軸上之極點 $z=0$ 的示意圖

因所欲解析之線積分是 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的積分，且 $z=0$ 為奇異點，故遇到不可解析點 $z=0$ 時需避開，其避開方式如圖二(a)或圖二(b)所示：

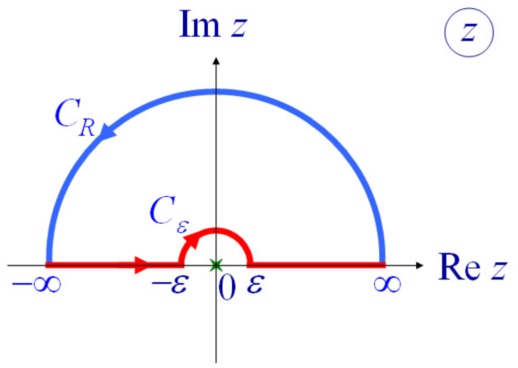


圖二(a)　以順鐘向方式繞過奇異點

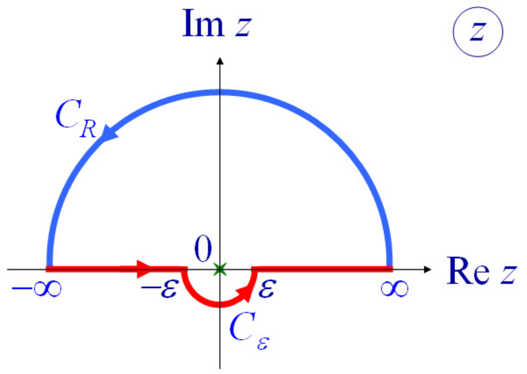


圖二(b)　以逆鐘向方式繞過奇異點

茲考慮如圖三(a)與三(b)之封閉路線積分方式：



圖三(a)　C_ε以順鐘向方式繞過奇異點作環積分



圖三(b)　C_ε以逆鐘向方式繞過奇異點作環積分

由圖三(a)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = \int_{C_R逆} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz \tag{2a}$$

由圖三(b)知，其環積分可表為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = \int_{C_R逆} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)中所出現之『順』表示『順鐘向積分』、『逆』表示『逆鐘向積分』。式(2a)與式(2b)中，都有出現$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz$與$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz$，當$\varepsilon\to 0$時，其和即為所欲推求之問題$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$，亦即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \tag{3}$$

因此，若採用圖三(a)所示之積分路徑，則：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz = \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon順} f(z)dz} \tag{4a}$$

若採用圖三(b)所示之積分路徑，則：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)dz = \oint_{C逆} f(z)dz - \int_{C_R逆} f(z)dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon逆} f(z)dz} \tag{4b}$$

以下說明式(4a)與式(4b)之解析方式。

■ 關於 $\int_{C_R逆} f(z)dz$ 的解析

一般說來，式(4a)與式(4b)中所示積分式 $\int_{C_R逆} f(z)dz$ 的積分值均為零，但其所需滿足的條件為：當 $f(z)=p(z)/q(z)$ 時，$O(q(z))-O(p(z))\geq 2$ 。證明過程如以下所示：

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R逆} f(z)\,dz\right| \leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R逆}|f(z)|\,dz \leq \lim_{R\to\infty}|f(z)||\pi R| = \lim_{R\to\infty}\frac{k}{R^2}(\pi R) = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi k}{R} = 0} \tag{5}$$

■ 關於 $\oint_{C逆} f(z)dz$ 的解析

若採用圖三(a)之積分方式，因封閉積分路徑內並無任何極點（Pole），故可由柯西積分定理（Cauchy Integral Theorem）知，其封閉路線積分之積分值為零，亦即：

$$\boxed{\oint_{C逆} f(z)dz = 0} \tag{6a}$$

若採用圖三(b)所示之積分方式，因其封閉積分路徑內有極點，故需引用殘值定理

（Residue Theorem），推求封閉路線積分之積分值，亦即：

$$\boxed{\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)} \tag{6b}$$

其中 z_j 表落在封閉積分路徑 C 內之極點。

■ 關於 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} f(z)dz$ 與 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} f(z)dz$ 的解析

茲考慮落在實數軸上之單極點為 $z=z_0$（由圖二(a)與圖二(b)知 $z_0=0$），且 $f(z)$ 可化簡為 $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-z_0}$，則 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} f(z)dz$ 與 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} f(z)dz$ 可分別表為：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} \frac{g(z)}{z-z_0}dz \tag{7a}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} \frac{g(z)}{z-z_0}dz \tag{7b}$$

式(7a)是根據圖三(a)所選取之順鐘向積分路徑 C_ε，式(7b)是根據圖三(b)所選取之逆鐘向積分路徑 C_ε。基於此，圖三(a)所示之順鐘向積分路徑 C_ε 可表為：

$$z-z_0=\varepsilon e^{i\theta}\ 、\ \theta\in[0,\pi] \tag{8a}$$

而圖三(b)所示之逆鐘向積分路徑 C_ε 可表為：

$$z-z_0=\varepsilon e^{i\theta}\ 、\ \theta\in[\pi,2\pi] \tag{8b}$$

根據式(8a)與式(8b)，式(7a)與式(7b)可分別改寫為：

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon\text{順}} f(z)dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon\text{順}} \frac{g(z)}{z-z_0}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}} d\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} \frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}} \left(i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0} g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)(id\theta) \\
&= \int_{\pi}^{0} g(z_0)(id\theta) \qquad\qquad (9a) \\
&= ig(z_0)\int_{\pi}^{0} d\theta \\
&= ig(z_0)(-\pi) \\
&= -\pi i g(z_0) \\
&= -\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon\text{逆}} f(z)dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon\text{逆}} \frac{g(z)}{z-z_0}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}} d\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}} \left(i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)(id\theta) \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} g(z_0)(id\theta) \qquad\qquad (9b) \\
&= ig(z_0)\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \\
&= ig(z_0)(\pi) \\
&= \pi i g(z_0) \\
&= \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)
\end{aligned}
$$

亦即：

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 順} f(z)dz = -\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)} \tag{10a}$$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon 逆} f(z)dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)} \tag{10b}$$

根據式(5)、式(6a)、式(6b)、式(10a)與式(10b)，則式(4a)與式(4b)所示問題之解即可推導出。