提要 393：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題(5)

作者擬以五個並用範例，說明如何解析與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題，以下所示為第五個應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$ 、 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx=-\pi e^{-2\pi}$ 之積分值。

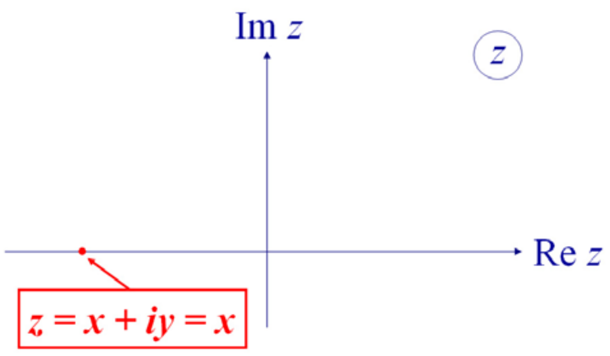
【證明】

茲將所欲探討之積分式予以編號：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx \tag{1a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx \tag{1b}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為 0，故 $z=x$

因此，式(1a)與式(1b)可分別改寫為：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\cos\pi z}{z^2+2z+5}dz \tag{2a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\sin\pi z}{z^2+2z+5}dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)再作 $A+iB$ 之運算，則：

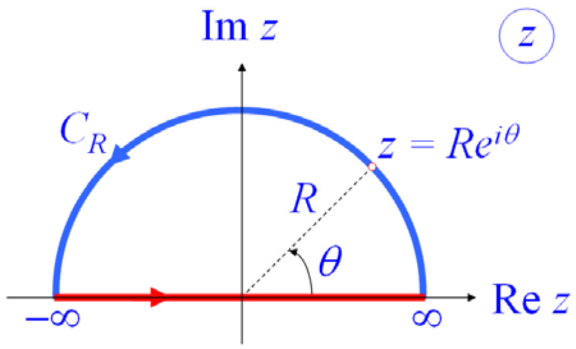
$$A+iB=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\cos\pi z}{z^2+2z+5}dz+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\sin\pi z}{z^2+2z+5}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\cos\pi z+iz\sin\pi z}{z^2+2z+5}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz \tag{3}$$

只要專心推求式(3)之解，再分別取其實數部分與虛數部分，則式(1a)與式(1b)所示問題之解即可求出：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} \tag{4a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} \tag{4b}$$

關於式(4a)與式(4b)之解析，關鍵在於積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ 之解析。對照之前關於參數 s 的討論知，本問題中之 π 相當於參數 s，即 $s=\pi$。因 $s=\pi>0$，由之前單元的討論知，在此條件下，推求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ 之積分值時，應選取如圖二所示上半平面之線積分：



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=\oint_C\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz-\int_{C_R}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$

由圖二知 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz=\oint_C\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz-\int_{C_R}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$，其中積分式 $\int_{C_R}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ 之積分值為零，這個道理說明如下：

$$\begin{aligned}\int_{C_R}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})e^{i\pi(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2+2(Re^{i\theta})+5}d(Re^{i\theta})\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})e^{i\pi[R(\cos\theta+i\sin\theta)]}}{R^2e^{i2\theta}+2(Re^{i\theta})+5}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})e^{i\pi R\cos\theta-\pi R\sin\theta}}{R^2e^{i2\theta}+2(Re^{i\theta})+5}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})(e^{i\pi R\cos\theta}e^{-\pi R\sin\theta})}{R^2e^{i2\theta}+2(Re^{i\theta})+5}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(e^{i\theta})[\cos(\pi R\cos\theta)+i\sin(\pi R\cos\theta)]e^{-\pi R\sin\theta}}{e^{i2\theta}+2(e^{i\theta}/R)+5/R^2}(ie^{i\theta}d\theta)\end{aligned}\tag{5}$$

其中變數 θ 之積分範圍是 $[0,\pi]$，故 $\sin\theta\geq 0$，又因考慮 $R\to\infty$，所以 $\lim_{R\to\infty}e^{-\pi R\sin\theta}\to 0$。

基於此，式(5)可再化簡如以下所示：

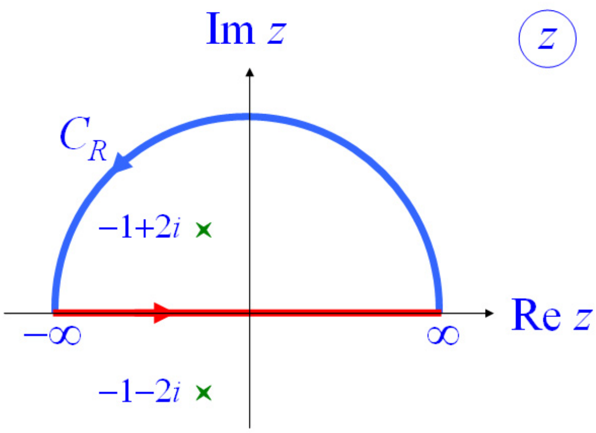
$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(e^{i\theta})[\cos(\pi R\cos\theta)+i\sin(\pi R\cos\theta)]e^{-\pi R\sin\theta}}{e^{i2\theta}+2(e^{i\theta}/R)+5/R^2}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(e^{i\theta})\{\cos[\pi(\infty)\cos\theta]+i\sin[\pi(\infty)\cos\theta]\}[e^{-\pi(\infty)\sin\theta}](ie^{i\theta})}{e^{i2\theta}+2(e^{i\theta}/\infty)+5/\infty^2}\right\}d\theta \\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(e^{i\theta})(\text{有限值})(0)(ie^{i\theta})}{e^{i2\theta}+0+0}\right\}d\theta\\
&=0
\end{aligned} \tag{6}
$$

因此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$
A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\oint_C\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} \tag{7a}
$$

$$
B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{\oint_C\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} \tag{7b}
$$

現在只要專心解析 $\oint_C\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz$ 即可。首先需瞭解一下封閉積分路徑內之**奇異點（Singular Point）**為何？令積分函數之分母為零，則可推求出問題之兩個奇異點 $z=-1+2i$ 與 $z=-1-2i$，如圖三所示；而 $z=-1+2i$ 係位於上半平面之奇異點，且為**單極點（Simple Pole）**。



圖三　單極點 $z=-1+2i$ 落在積分曲線 C 之內部

因 $z=-1+2i$ 為單極點，故可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 推求問題之解，其中單極點的計算公式需滿足的條件為：

❶ $p(z_0)\neq 0$；❷ z_0 為 C 內之單極點。所以：

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+2i} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5} \\
&= 2\pi i \lim_{z=-1+2i} \frac{ze^{i\pi z}}{(z^2+2z+5)'} \\
&= 2\pi i \lim_{z=-1+2i} \frac{ze^{i\pi z}}{2z+2} \\
&= 2\pi i \frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1+2i)+2} \\
&= \pi i \frac{(-1+2i)e^{-i\pi}e^{-2\pi}}{2i} \\
&= \pi \frac{(-1+2i)(-1)e^{-2\pi}}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}
\end{aligned} \tag{8}
$$

最後再引用式(7a)與式(7b)，即可推求出問題之解，亦即：

$$
\boxed{A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}\right\} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}} \tag{9a}
$$

$$
\boxed{B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}\right\} = -\pi e^{-2\pi}} \tag{9b}
$$

故得證。