提要 392：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題(4)

作者擬以五個並用範例，說明如何解析與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題，以下所示為第四個應用範例。

範例一
試證明 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$ 、$m>0$ 之積分值。

【證明】

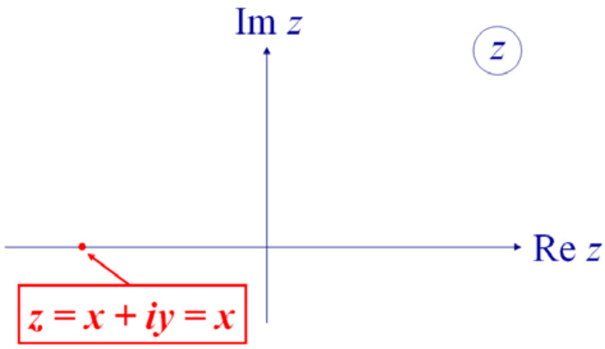
觀察積分式 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx$ 知，其中所示之積分函數 $f(x)=\frac{\cos mx}{x^2+1}$ 是一個**偶函數（Even Function）**，故 $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx$ 。為方便改寫為複數變數之積分，需再引入積分式 $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin mx}{x^2+1}dx$ ，其解析過程如以下所示。

茲將所欲探討之積分式予以編號：

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}dx \tag{1a}$$

$$B=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin mx}{x^2+1}dx \tag{1b}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$ ，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0 ，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$ 。



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故 $z = x$

因此，式(1a)與式(1b)可分別改寫為：

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mz}{z^2+1} dz \tag{2a}$$

$$B = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mz}{z^2+1} dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)再作 $A+iB$ 之運算，則：

$$A+iB = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mz}{z^2+1} dz + i\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mz}{z^2+1} dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mz + i\sin mz}{z^2+1} dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz \tag{3}$$

只要專心推求式(3)之解，再分別取其實數部分與虛數部分，則式(1a)與式(1b)所示問題之解即可求出：

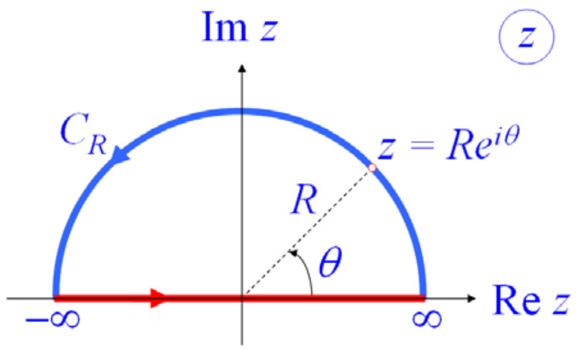
$$A = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1} dx = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz\right\} \tag{4a}$$

$$B = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x^2+1} dx = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz\right\} \tag{4b}$$

關於式(4a)與式(4b)之解析，關鍵在於積分式 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{imz}}{z^2+1} dz$ 之解析。對照之前關於參數 s 的

討論知，本問題中之m相當於參數s，即$s=m$。因$s=m>0$，由之前單元的討論知，

在此條件下，推求積分式$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$之解時，應選取如圖二所示上半平面之線積分：



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_{C}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$

由圖二所示之路線積分觀念，可知$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_{C}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$，其中積分式

$\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$之積分值為零，這個道理說明如下：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{im(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2+1}d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{im[R(\cos\theta+i\sin\theta)]}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{imR\cos\theta-mR\sin\theta}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{imR\cos\theta}e^{-mR\sin\theta}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(mR\cos\theta)+i\sin(mR\cos\theta)]e^{-mR\sin\theta}}{Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta)
\end{aligned} \tag{5}$$

其中變數θ之積分範圍是$[0,\pi]$，故$\sin\theta\geq 0$，又因考慮$R\to\infty$，所以$\lim_{R\to\infty}e^{-mR\sin\theta}\to 0$。

基於此，式(5)可再化簡如以下所示：

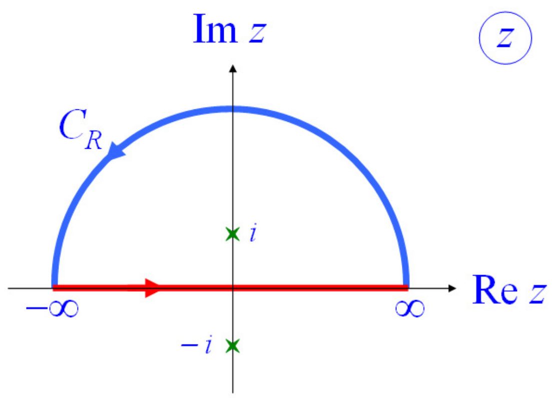
$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(mR\cos\theta)+i\sin(mR\cos\theta)]e^{-mR\sin\theta}}{Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi}\left\{\frac{\{\cos[m(\infty)\cos\theta]+i\sin[m(\infty)\cos\theta]\}(ie^{i\theta})}{(\infty)e^{i2\theta}+(1/\infty)}\right\}[e^{-m(\infty)\sin\theta}]d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left\{\frac{(\text{有限值})(ie^{i\theta})}{\infty+0}\right\}(0)d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

因此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$A=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{7a}$$

$$B=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{7b}$$

現在只要專心解析 $\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ 即可。首先需瞭解一下封閉積分路徑內之**奇異點（Singular Point）**為何？令積分函數之分母為零，則可推求出問題之兩個奇異點 $z=i$ 與 $z=-i$，如圖三所示；而 $z=i$ 係位於上半平面之奇異點，且為**單極點（Simple Pole）**。



圖三　單極點 $z=i$ 落在積分曲線 C 之內部

因 $z=i$ 為單極點，故可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式

$\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$推求問題之解，其中單極點的計算公式需滿足的條件為：

$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\text{；}❷\ z_0\text{為}C\text{內之單極點。}}$所以：

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz &= 2\pi i\,\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{e^{imz}}{z^2+1}\\ &= 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{imz}}{2z}\\ &= 2\pi i\,\frac{e^{im(i)}}{2(i)}\\ &= \pi e^{-m}\end{aligned}\tag{8}$$

最後再引用式(7a)，即可推求出問題之解，亦即：

$$\boxed{A=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{2}e^{-m}\right\}=\frac{\pi}{2}e^{-m}}\tag{9}$$

故得證。