提要 391：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題(3)

作者擬以五個並用範例，說明如何解析與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題，以下所示為第三個應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\pi e^{-m}$ 、 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx=0$ 、 $m>0$ 之積分值。

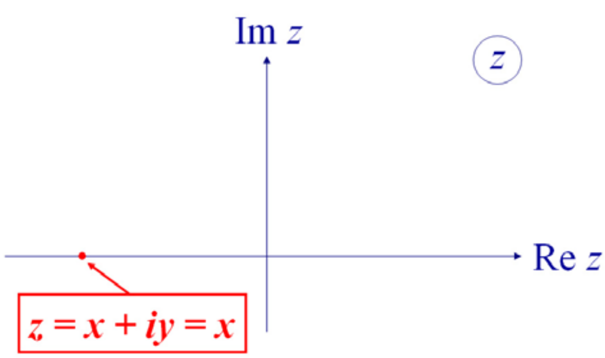
【證明】

茲將所欲探討之積分式予以編號：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx \tag{1a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx \tag{1b}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0 ，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$ 。



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為 0 ，故 $z=x$

因此，式(1a)與式(1b)可分別改寫為：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mz}{z^2+1}dz \tag{2a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mz}{z^2+1}dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)再作 $A+iB$ 之運算，則：

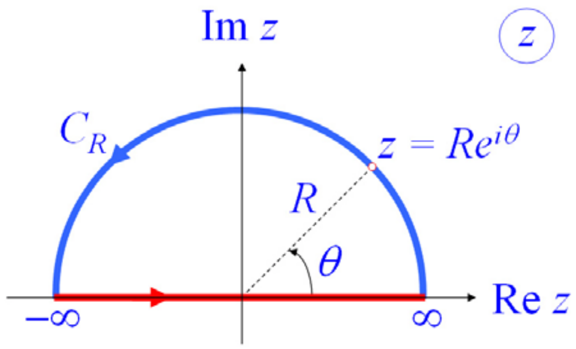
$$A+iB=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mz}{z^2+1}dz+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mz}{z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mz+i\sin mz}{z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz \tag{3}$$

只要專心推求式(3)之解，再分別取其實數部分與虛數部分，則式(1a)與式(1b)所示問題之解即可求出：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{4a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{4b}$$

關於式(4a)與式(4b)之解析，關鍵在於積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ 之解析。對照之前關於參數 s 的討論知，本問題中之 m 相當於參數 s，即 $s=m$。因 $s=m>0$，由之前單元的討論知，在此條件下，推求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ 之解時，應選取如圖二所示上半平面之線積分：



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$

由圖二所示之路線積分觀念，可知 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz=\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$，其中積分式 $\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ 之積分值為零，這個道理說明如下：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{im(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^2+1}d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{im[R(\cos\theta+i\sin\theta)]}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{imR\cos\theta-mR\sin\theta}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{imR\cos\theta}e^{-mR\sin\theta}}{R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(mR\cos\theta)+i\sin(mR\cos\theta)]e^{-mR\sin\theta}}{Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中變數θ之積分範圍是$[0,\pi]$，故$\sin\theta\ge 0$，又因考慮$R\to\infty$，所以$\lim_{R\to\infty}e^{-mR\sin\theta}\to 0$。基於此，式(5)可再化簡如以下所示：

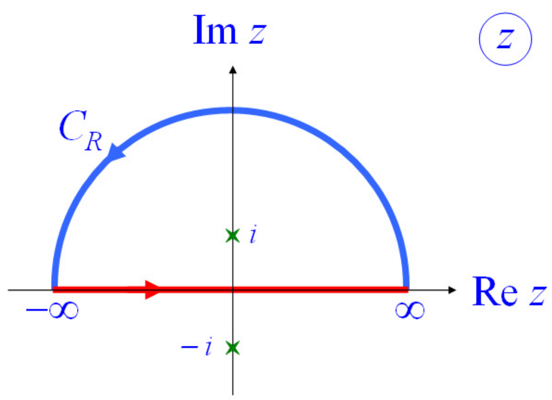
$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(mR\cos\theta)+i\sin(mR\cos\theta)]e^{-mR\sin\theta}}{Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{\{\cos[m(\infty)\cos\theta]+i\sin[m(\infty)\cos\theta]\}(ie^{i\theta})}{(\infty)e^{i2\theta}+(1/\infty)}\right\}[e^{-m(\infty)\sin\theta}]d\theta\\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(\text{有限值})(ie^{i\theta})}{\infty+0}\right\}(0)d\theta\\
&=0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

因此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{7a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} \tag{7b}$$

現在只要專心解析 $\oint_C\frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$ 即可。首先需瞭解一下封閉積分路徑內之**奇異點（Singular Point）**為何？令積分函數之分母為零，則可推求出問題之兩個奇異點 $z=i$ 與 $z=-i$，如圖三所示；而 $z=i$ 係位於上半平面之奇異點，且為**單極點（Simple Pole）**。



圖三　單極點 $z=i$ 落在積分曲線 C 之內部

因 $z=i$ 為單極點，故可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式

$\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$推求問題之解，其中單極點的計算公式需滿足的條件為：

$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\text{；}❷\ z_0\text{為}C\text{內之單極點。}}$所以：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{e^{imz}}{z^2+1} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{e^{imz}}{2z} \\
&= 2\pi i\,\frac{e^{im(i)}}{2(i)} \\
&= \pi e^{-m}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

最後再引用式(7a)與式(7b)，即可推求出問題之解，亦即：

$$
\boxed{A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}dx = \operatorname{Re}\left\{\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} = \operatorname{Re}\left\{\pi e^{-m}\right\} = \pi e^{-m}}
\tag{9a}
$$

$$
\boxed{B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{x^2+1}dx = \operatorname{Im}\left\{\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz\right\} = \operatorname{Im}\left\{\pi e^{-m}\right\} = 0}
\tag{9b}
$$

故得證。