提要 390：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題(2)

作者擬以五個並用範例，說明如何解析與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題，以下所示為第二個應用範例。

範例一
試推求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$ 之積分值。

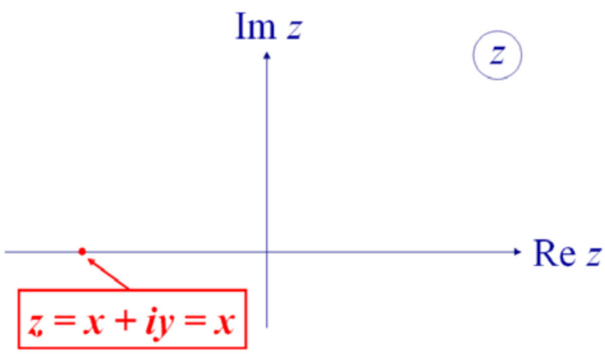
【解答】

茲將所欲探討之積分式予以編號：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx \tag{1a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx \tag{1b}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為 0，故 $z=x$

因此，式(1a)與式(1b)可分別改寫為：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi z}{z^4+z^2+1}dz \tag{2a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi z}{z^4+z^2+1}dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)再作 $A+iB$ 之運算，則：

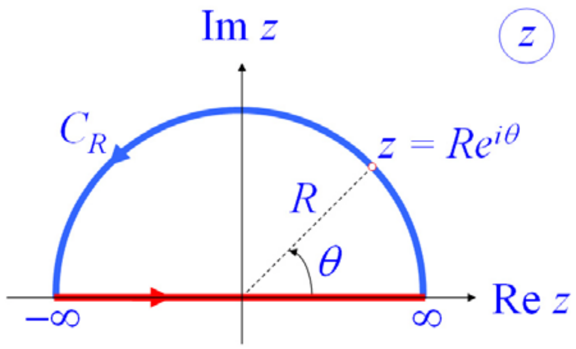
$$A+iB=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi z}{z^4+z^2+1}dz+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi z}{z^4+z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi z+i\sin 2\pi z}{z^4+z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz \tag{3}$$

只要專心推求式(3)之解，再分別取其實數部分與虛數部分，則式(1a)與式(1b)所示問題之解即可求出：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\} \tag{4a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\} \tag{4b}$$

關於式(4a)與式(4b)之解析，關鍵在於積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$ 之解析。對照之前單元關於參數 s 的討論知，本問題中之 2π 相當於參數 s，即 $s=2\pi$。因 $s=2\pi>0$，由之前單元的討論知，在此條件下，推求積分式 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$ 之解時，應選取如圖二所示上半平面之線積分：



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz=\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$

由圖二所示之路線積分觀念，可知 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz=\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz-\int_{C_R}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$，

其中積分式 $\int_{C_R}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$ 之積分值為零，這個道理說明如下：

$$\begin{aligned}\int_{C_R}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\pi(Re^{i\theta})}}{(Re^{i\theta})^4+(Re^{i\theta})^2+1}d(Re^{i\theta})\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\pi[R(\cos\theta+i\sin\theta)]}}{R^4e^{i4\theta}+R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\pi R\cos\theta-2\pi R\sin\theta}}{R^4e^{i4\theta}+R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\pi R\cos\theta}e^{-2\pi R\sin\theta}}{R^4e^{i4\theta}+R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta)\\&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(2\pi R\cos\theta)+i\sin(2\pi R\cos\theta)]e^{-2\pi R\sin\theta}}{R^3e^{i4\theta}+Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta)\end{aligned}\tag{5}$$

其中變數 θ 之積分範圍是 $[0,\pi]$，故 $\sin\theta\geq 0$，又因考慮 $R\to\infty$，所以 $\lim_{R\to\infty}e^{-2\pi R\sin\theta}\to 0$。

基於此，式(5)可再化簡如以下所示：

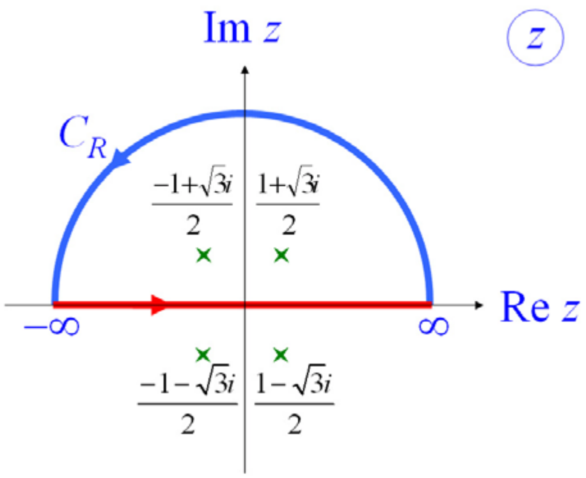
$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(2\pi R\cos\theta)+i\sin(2\pi R\cos\theta)]e^{-2\pi R\sin\theta}}{R^3e^{i4\theta}+Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\int_0^{\pi}\lim_{R\to\infty}\left\{\frac{[\cos(2\pi R\cos\theta)+i\sin(2\pi R\cos\theta)](ie^{i\theta})}{R^3e^{i4\theta}+Re^{i2\theta}+(1/R)}\right\}\lim_{R\to\infty}\left\{e^{-2\pi R\sin\theta}\right\}d\theta\\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{\{\cos[2\pi(\infty)\cos\theta]+i\sin[2\pi(\infty)\cos\theta]\}(ie^{i\theta})}{(\infty)^3e^{i4\theta}+(\infty)e^{i2\theta}+(1/\infty)}\right\}\left\{e^{-2\pi(\infty)\sin\theta}\right\}d\theta \qquad (6)\\
&=\int_0^{\pi}\left\{\frac{(\text{有限值})(ie^{i\theta})}{\infty+\infty+0}\right\}\{0\}d\theta\\
&=0
\end{aligned}
$$

因此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$
A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\} \qquad (7a)
$$

$$
B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\} \qquad (7b)
$$

現在只要專心解析 $\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz$ 即可。首先需瞭解一下封閉積分路徑內之**奇異點（Singular Point）**為何？令積分函數之分母為零，則可推求出問題之四個奇異點 $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 、 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 、 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 【附註一】，如圖三所示；而 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 係位於上半平面之奇異點，且均為**單極點（Simple Pole）**。



圖三　單極點 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 落在積分曲線 C 之內部

因 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 均為單極點，故可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \dfrac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 推求問題之解，其中單極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$ 所以：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{(z^4+z^2+1)'} + 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{(z^4+z^2+1)'} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{4z^3+2z} + 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{e^{i2\pi z}}{4z^3+2z} \\
&= 2\pi i \frac{exp\left[i2\pi\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]}{4\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3+2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)} + 2\pi i \frac{exp\left[i2\pi\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]}{4\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3+2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)} \\
&= 2\pi i \frac{e^{i\pi}e^{-\sqrt{3}\pi}}{4(-1)+(1+\sqrt{3}i)} + 2\pi i \frac{e^{-i\pi}e^{-\sqrt{3}\pi}}{4(1)+(-1+\sqrt{3}i)} \\
&= 2\pi i \frac{-e^{-\sqrt{3}\pi}}{-3+\sqrt{3}i} + 2\pi i \frac{-e^{-\sqrt{3}\pi}}{3+\sqrt{3}i} \\
&= 2\pi i \frac{(-3-\sqrt{3}i)(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{(-3+\sqrt{3}i)(-3-\sqrt{3}i)} + 2\pi i \frac{(3-\sqrt{3}i)(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)} \\
&= 2\pi i \frac{(-3-\sqrt{3}i)(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{12} + 2\pi i \frac{(3-\sqrt{3}i)(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{12} \\
&= 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{12} + 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{12} \\
&= 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i(-e^{-\sqrt{3}\pi})}{6} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\sqrt{3}\pi}
\end{aligned}
$$

最後再引用式(7a)與式(7b)，即可推求出問題之解，亦即：

$$
\boxed{A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Re}\left\{\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\sqrt{3}\pi}\right\}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\sqrt{3}\pi}} \tag{9a}
$$

$$
\boxed{B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=\mathrm{Im}\left\{\oint_C\frac{e^{i2\pi z}}{z^4+z^2+1}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\sqrt{3}\pi}\right\}=0} \tag{9b}
$$

以上即為所求問題之解。【附註二】

【附註一】

欲找出落在積分曲線C內之**極點（Pole）**時，需先考慮積分函數之分母為零，即$z^4+z^2+1=0$，此一元四次方程式可先因式分解為：

$$\left(z^2-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z^2-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0 \qquad \text{(A1)}$$

上式若想再繼續進行因式分解，是需要一點智慧的。讀者需具備將$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$寫成$(\alpha+i\beta)^2$的能力，作者經由令$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=(\alpha+i\beta)^2$之關係式可知$\alpha=\frac{1}{2}$、$\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故式(A1)可再因式分解為：

$$\left[z^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\right]=0 \qquad \text{(A2)}$$

上式可再調整為：

$$\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0 \qquad \text{(A3)}$$

所以問題之四個極點為：

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \qquad \text{(A4)}$$

這四個**單極點（Simple Pole）**中僅極點$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$與$z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$落在封閉積分曲線C之內部，如圖三所示。

【附註二】

參考文獻[1]中，與 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$ 相似之例題 $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$ 的解答為：

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\pi/\sqrt{3}}$$

對照此一結果與本單元所推導出之解時發現，兩者之結果並不是差兩倍！筆者尚需更多時間瞭解其問題何在，但筆者能保證以上所示解析步驟的各種觀念與想法均是正確的。

【參考文獻】

1. Spiegel, M.R., *Theory and Problems of Complex Variables with An Introduction to Conformal Mapping and It's Applications*, McGraw-Hill, New York, p. 196 (1964).