提要 389：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題(1)

作者擬以五個並用範例，說明如何解析與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關之線積分問題，以下所示為第一個應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx=\frac{\pi}{k}e^{-ks}$、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx=0$。

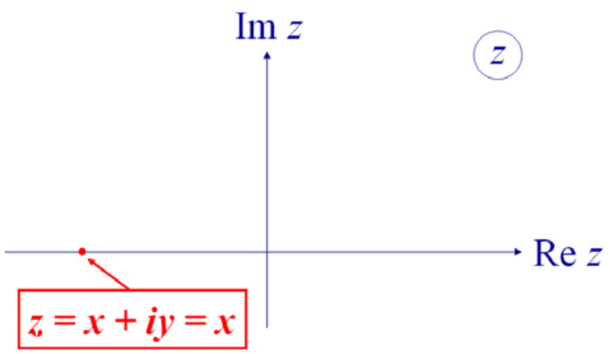
【證明】

茲將所欲探討之積分式予以編號：

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx \tag{1a}$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx \tag{1b}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為 $z=x+iy$，其中 x 稱為 **z 之實部（Real Part of z）**，y 稱為 **z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為 0，故 $z=x+iy=x+i(0)=x$。



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為 0，故 $z=x$

因此，式(1a)與式(1b)可分別改寫為：

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz}{k^2 + z^2} dz \tag{2a}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} dz \tag{2b}$$

式(2a)與式(2b)再作 $A + iB$ 之運算，則：

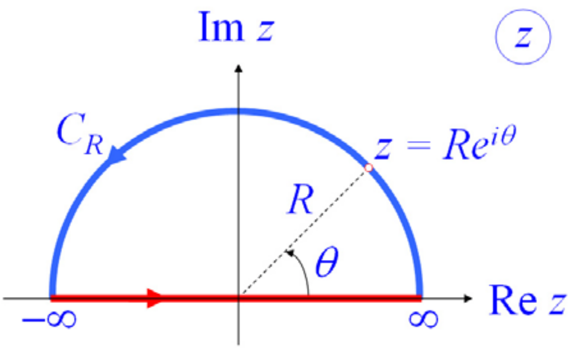
$$A + iB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz}{k^2 + z^2} dz + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sz}{k^2 + z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz + i\sin sz}{k^2 + z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz \tag{3}$$

只要專心推求式(3)之解，再分別取其實數部分與虛數部分，則式(1a)與式(1b)所示問題之解即可求出：

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} dx = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz\right\} \tag{4a}$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2 + x^2} dx = \mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz\right\} \tag{4b}$$

關於式(4a)與式(4b)之解析，關鍵在於積分式 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz$ 之解析。由前一單元關於參數 s 的討論知，當 $s > 0$ 時，應選取如圖二所示上半平面之線積分：



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz = \oint_C \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz - \int_{C_R} \frac{e^{isz}}{k^2 + z^2} dz$

由圖二所示之路線積分觀念，可知 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz=\oint_C\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz-\int_{C_R}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz$ ，其中積分式 $\int_{C_R}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz$ 之積分值為零，這個道理說明如下：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{is(Re^{i\theta})}}{k^2+(Re^{i\theta})^2}d(Re^{i\theta})\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{is[R(\cos\theta+i\sin\theta)]}}{k^2+R^2e^{i2\theta}}(iRe^{i\theta}d\theta)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{isR\cos\theta-sR\sin\theta}}{k^2+R^2e^{i2\theta}}(iRe^{i\theta}d\theta)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{isR\cos\theta}\,e^{-sR\sin\theta}}{k^2+R^2e^{i2\theta}}(iRe^{i\theta}d\theta)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(sR\cos\theta)+i\sin(sR\cos\theta)]e^{-sR\sin\theta}}{k^2/R+Re^{i2\theta}}(ie^{i\theta}d\theta)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中變數 θ 之積分範圍是 $[0,\pi]$，故 $\sin\theta\geq 0$ ，又因考慮 $R\to\infty$ ，所以 $\lim_{R\to\infty}e^{-sR\sin\theta}\to 0$ 。基於此，式(5)可再化簡如以下所示：

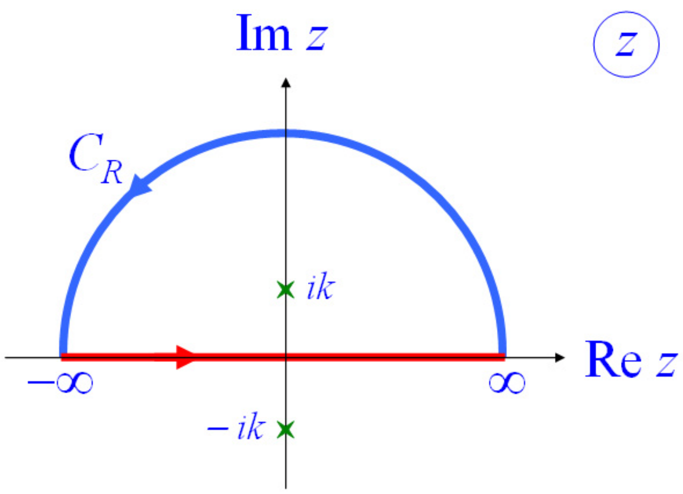
$$
\begin{aligned}
\int_{C_R}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz &= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{[\cos(sR\cos\theta)+i\sin(sR\cos\theta)]e^{-sR\sin\theta}}{k^2/R+Re^{i2\theta}}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\{\cos[s(\infty)\cos\theta]+i\sin[s(\infty)\cos\theta)]\}e^{-s(\infty)\sin\theta}(ie^{i\theta})}{(k^2/\infty)+R(\infty)e^{i2\theta}}d\theta\\
&= \int_0^{\pi}\left\{\frac{(\text{有限值})(0)(ie^{i\theta})}{0+\infty}\right\}d\theta\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

因此，式(4a)與式(4b)可改寫為：

$$
A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx=\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz\right\}=\mathrm{Re}\left\{\oint_C\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz\right\}
\tag{7a}
$$

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx=\mathrm{Im}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz\right\}=\mathrm{Im}\left\{\oint_C\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz\right\} \tag{7b}$$

現在只要專心解析 $\oint_C\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dz$ 即可。首先需瞭解一下封閉積分路徑內之**奇異點**（**Singular Point**）為何？令積分函數之分母為零，則可推求出問題之兩個奇異點 $z=ki$ 與 $z=-ki$，如圖三所示；而 $z=ki$ 係位於上半平面之奇異點，且為**單極點**（**Simple Pole**）。



圖三　單極點 $z=ik$ 落在積分曲線 C 之內部

因 $z=ik$ 為單極點，故可引用**殘值定理**（**Residue Theorem**）與單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C\frac{p(z)}{q(z)}dz=2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 推求問題之解，其中單極點的計算公式需滿足的條件為：

$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\text{；}❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$所以：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to ik} \frac{e^{isz}}{(k^2+z^2)'} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to ik} \frac{e^{isz}}{2z} \\
&= 2\pi i \frac{e^{is(ik)}}{2ik} \\
&= \frac{\pi}{k} e^{-sk}
\end{aligned}
$$

最後再引用式(7a)與式(7b)，即可推求出問題之解，亦即：

$$
\boxed{A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}\,dx = \mathrm{Re}\left\{\oint_C \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}\,dz\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\pi}{k}e^{-sk}\right\} = \frac{\pi}{k}e^{-sk}} \tag{9a}
$$

$$
\boxed{B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}\,dx = \mathrm{Im}\left\{\oint_C \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}\,dz\right\} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\pi}{k}e^{-sk}\right\} = 0} \tag{9b}
$$

故得證。