提要 388：以複變分析解析與 sin sx 或 cos sx 有關之線積分

有一類的線積分問題會與三角函數 sin sx 或 cos sx 有關，該類問題即**富利葉積分（Fourier Integral）**問題。這一類問題之標準型態為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx \tag{1}$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx \tag{2}$$

這兩種問題若欲個別加以解析，其實會很麻煩！但若聯合起來加以解析，卻會簡單很多！聽起來似乎有點不可思異，但卻是真的。用一個聖經上的貼切講法：「一個人趕一千，兩個人趕一萬！」讀者們即使尚未結婚，無法深刻體會其中含意，但亦會同意兩個人同心合意的力量遠大於一個人的力量之講法。這倒底是怎麼一回事呢？讓我詳細告訴您。

令式(2)先乘以 i 再加上式(1)，則式(1)與式(2)可合併為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx \tag{3}$$

上式係先各自作積分之後再相加，因這兩個運算是可以對調的，故上式可改寫為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos sx + i\sin sx)\,dx \tag{4}$$

由**尤拉公式（Euler Formula）**知：

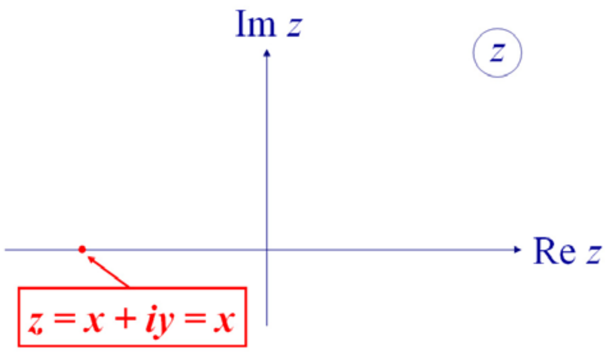
$$e^{isx} = \cos sx + i\sin sx \tag{5}$$

所以式(4)可再調整為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\,dx \tag{6}$$

由之前的討論知，如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為$z = x + iy$，其中x稱為**z 之實部（Real Part of z）**，y稱為**z 之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為0，故：

$$z = x + iy = x + i(0) = x \tag{7}$$



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故$z = x$

因此式(6)可改寫為：

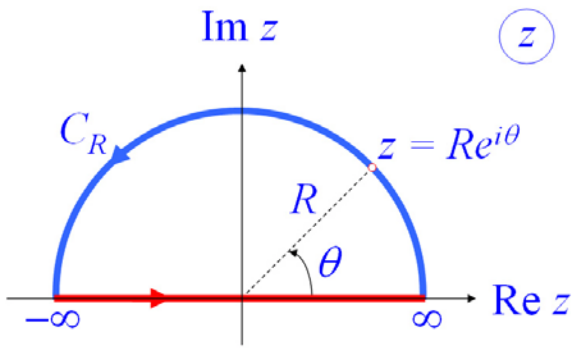
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz \tag{8}$$

■ 當 $s \geq 0$ 時，取上半平面之線積分

式(8)是擬於複數平面上作實數軸上之線積分。如圖二所示，可將實數軸上之線積分改寫為封閉曲線之線積分減去半圓之線積分，即：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz-\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz \tag{9}$$

式(9)所示積分曲線 C 與 C_R 的積分方向均為**逆鐘向**，且 $R\to\infty$。



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz-\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz$

若考慮積分式 $\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz$ 中之 $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$ ＝有限值，則：

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz\right|\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\left|f(z)e^{isz}\right|dz\leq\lim_{R\to\infty}\left|f(z)\right|\left|e^{isz}\right|\left|\pi R\right|=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{R^2}\left|e^{is\left(Re^{i\theta}\right)}\right|(\pi R)=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi k}{R}=0 \tag{10}$$

所以：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz} \tag{11}$$

其中積分式 $\oint_C f(z)e^{isz}\,dz$ 之積分方式已教過至少五種以上的解析方法，讀者應有能力加以解析，故式(8)所示問題之解即可推導出。若已知積分式 $\oint_C f(z)e^{isz}\,dz$ 之封閉積分路徑 C 中有 n 個極點 $z_j\left(j=1,2,\cdots,n\right)$，則可引用**殘值定理（Residue Theorem）**，再將式(11)改寫為：

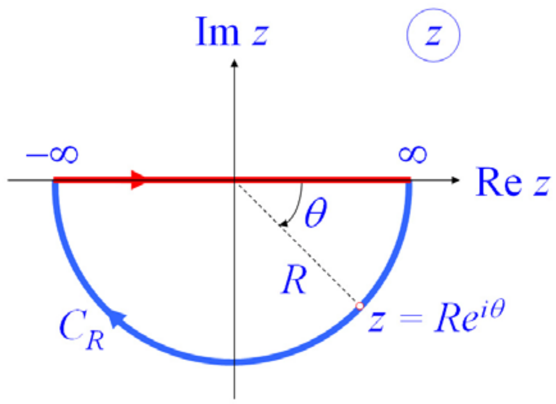
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)e^{isz}} \tag{12}$$

■當 $s<0$ 時，取下半平面之線積分

式(9)至式(7)之解析是考慮上半平面之線積分，若考慮下半平面之線積分，如圖三所示，則亦可將實數軸上之線積分改寫為封閉曲線之線積分減去半圓之線積分，即：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz-\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz \tag{13}$$

但式(13)中積分曲線 C 與 C_R 的積分方向均為**順鐘向**，且 $R\to\infty$。



圖三　實數軸上之線積分改寫方式：$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz-\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz$

若考慮積分式 $\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz$ 中之 $f(z)e^{isz}=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，且 $O(q(z))-O(p(z))\geq 2$，則：

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)e^{isz}\,dz\right|\leq \lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\left|f(z)e^{isz}\right|dz\leq \lim_{R\to\infty}\left|f(z)\right|\left|e^{isz}\right|\left|\pi R\right|=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{R^2}(1)(\pi R)=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi k}{R}=0 \tag{14}$$

所以：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz=\oint_{C} f(z)e^{isz}\,dz} \tag{15}$$

其中積分式$\oint_C f(z)e^{isz}\,dz$之積分方式已學過至少五種以上的解析方法，讀者應有能力加以解析，故式(8)所示問題之解即可推導出。若已知積分式$\oint_C f(z)e^{isz}\,dz$之封閉積分路徑C中有n個極點$z_j(j=1,2,\cdots,n)$，則可引用**殘值定理**，再將式(15)改寫為：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz = -\sum_{j=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)e^{isz}} \tag{16}$$

上式加負號的原因是因積分方向為順鐘向。

由式(12)或式(16)均可研討出問題之解，最後來到最重要的觀念。若由式(12)或式(16)所研討出之解為：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz = \alpha + i\beta \tag{17}$$

又由式(3)與式(7)之觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{isz}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx \tag{18}$$

比較式(17)與式(18)知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx = \alpha \text{ 、 } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = \beta \tag{19}$$

故問題之解即可求出。