提要 387：以複變分析解析實數函數由 0 至∞的線積分問題(5)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分（Improper Integral）**問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第五個複變分析在 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ 。

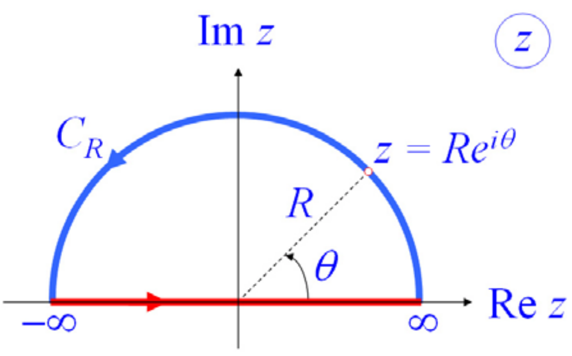
【證明】

因為 $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ 是**偶函數（Even Function）**，所以：

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$$

以下說明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$ 的解析方式，最後再將結果除以 2，即可求出問題之解。

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \qquad (1)$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta \le \pi \qquad (2)$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^4 + (Re^{i\theta})^2 + 1}\, d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^4 e^{i4\theta} + R^2 e^{i2\theta} + 1}\,(iRe^{i\theta}\,d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^3 e^{i4\theta} + Re^{i2\theta} + (1/R)}\,(ie^{i\theta}\,d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{(\infty)^3 e^{i4\theta} + (\infty)e^{i2\theta} + (1/\infty)}\,(ie^{i\theta}\,d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\infty + \infty + 0}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $z^4+z^2+1=0$，此一元四次方程式可先因式分解為：

$$\left(z^2-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z^2-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0 \tag{3}$$

上式若想再繼續進行因式分解，是需要一點智慧的。讀者需具備將 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 寫成 $(\alpha+i\beta)^2$ 的能力，作者經由令 $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=(\alpha+i\beta)^2$ 之關係式可知 $\alpha=\frac{1}{2}$、$\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故式(3)可再因式分解為：

$$\left[z^2-\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2\right]=0 \tag{4}$$

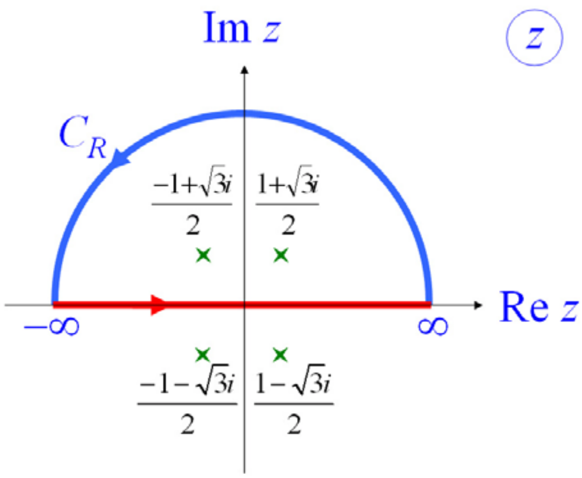
上式可再調整為：

$$\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)=0 \tag{5}$$

所以問題之四個極點為：

$$z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\text{、}z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \tag{6}$$

這四個**單極點（Simple Pole）**中僅極點 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。



圖二　單極點 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \dfrac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{z^4+z^2+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{z^4+z^2+1}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{(z^4+z^2+1)'} + 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{(z^4+z^2+1)'}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{4z^3+2z} + 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{4z^3+2z}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{4\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)} + 2\pi i \frac{1}{4\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{4(-1)+(1+\sqrt{3}i)} + 2\pi i \frac{1}{4(1)+(-1+\sqrt{3}i)}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-3+\sqrt{3}i} + 2\pi i \frac{1}{3+\sqrt{3}i}$$

$$= 2\pi i \frac{-3-\sqrt{3}i}{(-3+\sqrt{3}i)(-3-\sqrt{3}i)} + 2\pi i \frac{3-\sqrt{3}i}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}$$

$$= 2\pi i \frac{-3-\sqrt{3}i}{12} + 2\pi i \frac{3-\sqrt{3}i}{12}$$

$$= 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i}{12} + 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i}{12}$$

$$= 2\pi i \frac{-\sqrt{3}i}{6}$$

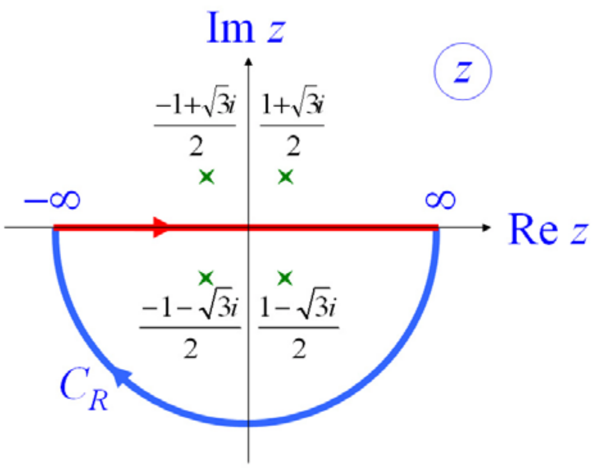
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 0\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi
\end{aligned}}$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{7}$$

其積分方向均為**順鐘向**，茲分別討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } -\pi \le \theta \le 0 \tag{8}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+(Re^{i\theta})^2+1}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{R^4e^{i4\theta}+R^2e^{i2\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{R^3e^{i4\theta}+Re^{i2\theta}+(1/R)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{1}{(\infty)^3e^{i4\theta}+(\infty)e^{i2\theta}+(1/\infty)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\infty+\infty+0}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

由之前的研討知，此一元四次方程式有四個單極點 $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 、 $z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 、 $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 、 $z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ，其中落在積分曲線 C 內之單極點為 $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 與 $z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ，如圖三所示。

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{z^4+z^2+1} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{z^4+z^2+1}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to\frac{1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{(z^4+z^2+1)'} - 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{(z^4+z^2+1)'}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to\frac{1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{4z^3+2z} - 2\pi i \lim_{z\to\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}} \frac{1}{4z^3+2z}$$

$$= -2\pi i \frac{1}{4\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)} - 2\pi i \frac{1}{4\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)}$$

$$= -2\pi i \frac{1}{4(-1)+(1-\sqrt{3}i)} - 2\pi i \frac{1}{4(1)+(-1-\sqrt{3}i)}$$

$$= -2\pi i \frac{1}{-3-\sqrt{3}i} - 2\pi i \frac{1}{3-\sqrt{3}i}$$

$$= -2\pi i \frac{-3+\sqrt{3}i}{(-3-\sqrt{3}i)(-3+\sqrt{3}i)} - 2\pi i \frac{3+\sqrt{3}i}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}$$

$$= -2\pi i \frac{-3+\sqrt{3}i}{12} - 2\pi i \frac{3+\sqrt{3}i}{12}$$

$$= -2\pi i \frac{\sqrt{3}i}{12} - 2\pi i \frac{\sqrt{3}i}{12}$$

$$= -2\pi i \frac{\sqrt{3}i}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

因此可根據式(7)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{z^4+z^2+1}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 0\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}\pi
\end{aligned}}$$

故得證。