提要 386：以複變分析解析實數函數由 0 至∞的線積分問題(4)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分（Improper Integral）**問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第四個複變分析在 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx=\frac{5\pi}{288}$ 。

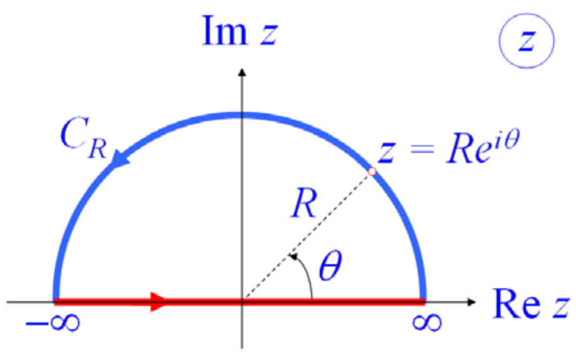
【證明】

因為 $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$ 是**偶函數（Even Function）**，所以：

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx$$

以下說明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}dx$ 的解析方式，最後再將結果除以 2，即可求出問題之解。

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta \le \pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{[(Re^{i\theta})^2+1][(Re^{i\theta})^2+4]^2}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+4)^2}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i2\theta}+1/R)(R^2e^{i2\theta}+4)^2}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{[(\infty)e^{i2\theta}+1/R][(\infty)^2e^{i2\theta}+4]^2}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{(\infty+0)(\infty+4)}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

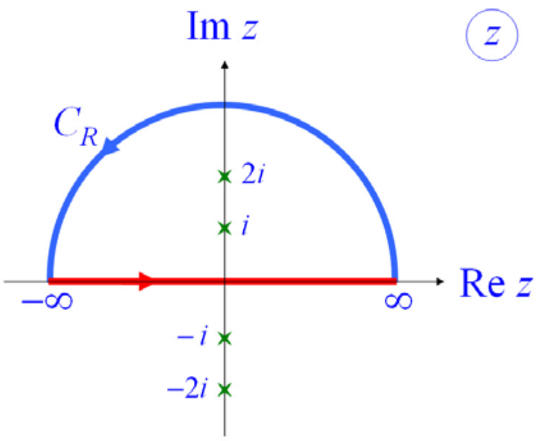
首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $(z^2+1)(z^2+4)^2=0$，此一元六次方程式可因式分解為：

$$(z+i)(z-i)(z+2i)^2(z-2i)^2=0$$

所以問題之四個極點為：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-2i \text{ 、 } z=2i$$

這些極點中之 $z=-i$ 與 $z=i$ 是**單極點(Simple Pole)**，而 $z=-2i$ 與 $z=2i$ 是**二階極點(Pole of Order Two)**。這四個極點中有兩個極點 $z=i$ 與 $z=2i$ 係落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。



圖二　四個極點中有兩個落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**、單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz=2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$、二階極點的計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz=2\pi i\lim_{z\to z_0}\frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$ 求解。其中單極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\text{；}❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點；}}$ 二階極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$ 基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)^2} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)^2}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{[(z^2+1)(z^2+4)^2]'}\bigg|_{z=i} + 2\pi i \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2 \frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)^2}\right]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2z)(z^2+4)^2+(z^2+1)[2(2z)(z^2+4)]}\bigg|_{z=i} + 2\pi i \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z+2i\right)^2}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2i)(i^2+4)^2+(i^2+1)[2(2i)(i^2+4)]}$$

$$+ 2\pi i \lim_{z\to 2i}\left[-\frac{2z}{\left(z^2+1\right)^2\left(z+2i\right)^2} - \frac{2}{\left(z^2+1\right)\left(z+2i\right)^3}\right]$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(2i)(-1+4)^2+(-1+1)[4i(-1+4)]}$$

$$+ 2\pi i \left\{-\frac{2(2i)}{[(2i)^2+1]^2\left(2i+2i\right)^2} - \frac{2}{[(2i)^2+1]\left(2i+2i\right)^3}\right\}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{18i} + 2\pi i\left[-\frac{4i}{9(-16)} - \frac{2}{(-3)(-64i)}\right]$$

$$= \frac{1}{9}\pi + 2\pi i\left(\frac{4i}{144}+\frac{2i}{192}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\pi + 2\pi i\left(\frac{11i}{288}\right)$$

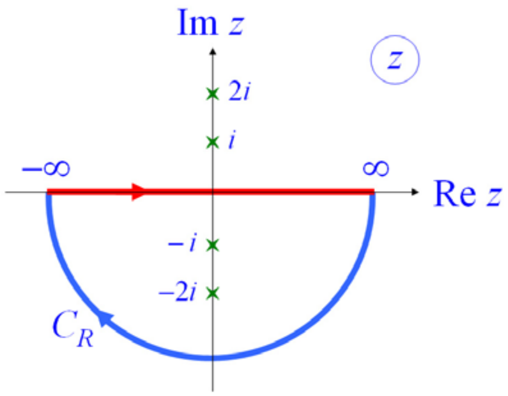
$$= \frac{5}{144}\pi$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz \\ &= \frac{1}{2}\left[\oint_C\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz - \int_{C_R}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{144}\pi - 0\right) \\ &= \frac{5}{288}\pi\end{aligned}}$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論知，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{3}$$

其積分方向均為**順鐘向**，故討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值時需變號。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{、} -\pi \le \theta \le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{[(Re^{i\theta})^2+1][(Re^{i\theta})^2+4]^2}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+4)^2}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{(Re^{i2\theta}+1/R)(R^2e^{i2\theta}+4)^2}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{1}{[(\infty)e^{i2\theta}+1/R][(\infty)^2e^{i2\theta}+4]^2}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\theta}}{(\infty+0)(\infty+4)}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

根據前面之研討知，本問題有四個極點，即：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-2i \text{ 、 } z=2i$$

這四個極點中有兩個極點 $z=-i$ 與 $z=-2i$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示，且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**、單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$、二階極點的計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$ 求解。其中單極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點；}}$ 二階極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$ 基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2} \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{[(z^2+1)(z^2+4)^2]'}\right|_{z=-i} - 2\pi i \lim_{z\to -2i} \frac{d}{dz}\left[(z+2i)^2 \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\right] \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{(2z)(z^2+4)^2+(z^2+1)[2(2z)(z^2+4)]}\right|_{z=-i} - 2\pi i \lim_{z\to -2i} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z^2+1)(z-2i)^2} \\
&= -2\pi i \frac{1}{(-2i)[(-i)^2+4]^2+[(-i)^2+1]\{2(-2i)[(-i)^2+4)]\}} \\
&\quad -2\pi i \lim_{z\to -2i}\left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2(z-2i)^2}-\frac{2}{(z^2+1)(z-2i)^3}\right] \\
&= -2\pi i \frac{1}{(-2i)(-1+4)^2+(-1+1)[-4i(-1+4)]} \\
&\quad -2\pi i\left\{-\frac{2(-2i)}{[(-2i)^2+1]^2(-2i-2i)^2}-\frac{2}{[(-2i)^2+1](-2i-2i)^3}\right\} \\
&= -2\pi i \frac{1}{-18i} - 2\pi i\left[-\frac{-4i}{9(-16)}-\frac{2}{(-3)(64i)}\right] \\
&= \frac{1}{9}\pi - 2\pi i\left(\frac{-4i}{144}+\frac{-2i}{192}\right) \\
&= \frac{1}{9}\pi - 2\pi i\left(-\frac{11i}{288}\right) \\
&= \frac{5}{144}\pi
\end{aligned}
$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}\,dz\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{144}\pi - 0\right) \\
&= \frac{5}{288}\pi
\end{aligned}
}
$$

故以此方式亦可證明出相同的結果。