提要 385：以複變分析解析實數函數由 0 至∞的線積分問題(3)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分（Improper Integral）**問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第三個複變分析在 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{3}$ 。

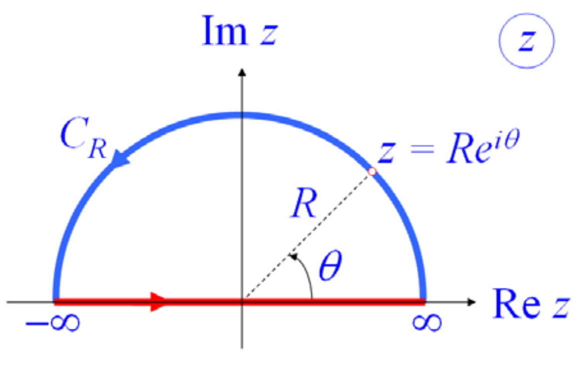
【證明】

因為 $\frac{1}{x^6+1}$ 是**偶函數（Even Function）**，所以：

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$$

以下說明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$ 的解析方式，最後再將結果除以 2，即可求出問題之解。

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta \le \pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^6+1}\, d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^6 e^{i6\theta}+1} (iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^5 e^{i6\theta}+1/R} (iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{(\infty)^5 e^{i2\theta}+(1/\infty)} (ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\infty+0} d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

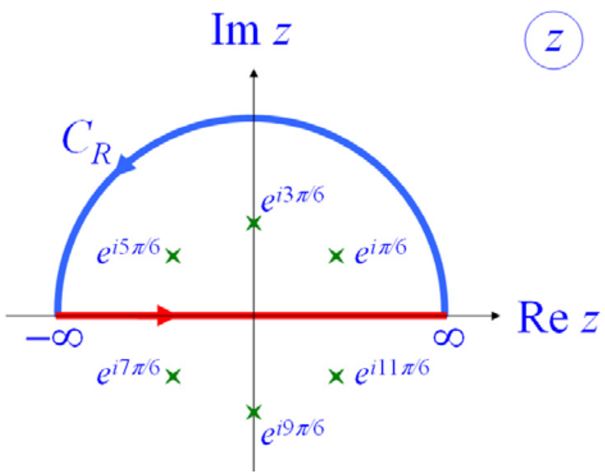
首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $z^6+1=0$，此一元六次方程式可因式分解為：

$$\left(z-e^{i\pi/6}\right)\left(z-e^{i3\pi/6}\right)\left(z-e^{i5\pi/6}\right)\left(z-e^{i7\pi/6}\right)\left(z-e^{i9\pi/6}\right)\left(z-e^{i11\pi/6}\right)=0$$

所以問題之六個極點為：

$$z=e^{i\pi/6}\text{、}z=e^{i3\pi/6}\text{、}z=e^{i5\pi/6}\text{、}z=e^{i7\pi/6}\text{、}z=e^{i9\pi/6}\text{、}z=e^{i11\pi/6}$$

這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。這六個極點中有三個極點 $z=e^{i\pi/6}$、$z=e^{i3\pi/6}$、$z=e^{i5\pi/6}$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。



圖二　六個極點中有三個落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

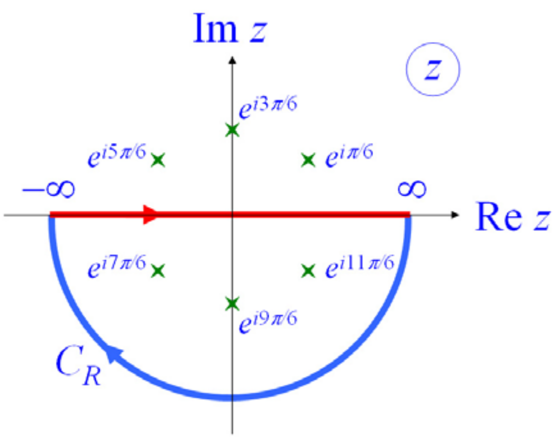
$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i3\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i5\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} \\
&= 2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i\pi/6}} + 2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i3\pi/6}} + 2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i5\pi/6}} \\
&= 2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i\pi/6}} + 2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i3\pi/6}} + 2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i5\pi/6}} \\
&= 2\pi i \frac{1}{6(e^{i\pi/6})^5} + 2\pi i \frac{1}{6(e^{i3\pi/6})^5} + 2\pi i \frac{1}{6(e^{i5\pi/6})^5} \\
&= 2\pi i \frac{1}{6e^{i5\pi/6}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i15\pi/6}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i25\pi/6}} \\
&= 2\pi i \frac{1}{6e^{i5\pi/6}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i(3\pi/6+2\pi)}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i(\pi/6+4\pi)}} \\
&= 2\pi i \frac{1}{6e^{i5\pi/6}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i3\pi/6}} + 2\pi i \frac{1}{6e^{i\pi/6}} \\
&= 2\pi i \frac{e^{-i5\pi/6}}{6} + 2\pi i \frac{e^{-i3\pi/6}}{6} + 2\pi i \frac{e^{-i\pi/6}}{6} \\
&= \frac{\pi i}{3}\left(e^{-i5\pi/6} + e^{-i3\pi/6} + e^{-i\pi/6}\right) \\
&= \frac{\pi i}{3}\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + (-i) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{\pi i}{3}(-i-i) \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^6+1}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{1}{z^6+1}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
}
$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論知，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{3}$$

其積分方向均為**順鐘向**，故討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值時需變號。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、} -\pi \le \theta \le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^6+1}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{R^6 e^{i6\theta}+1}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{R^5 e^{i6\theta}+1/R}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{1}{(\infty)^5 e^{i2\theta}+(1/\infty)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\theta}}{\infty+0}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

根據前面之研討知，本問題有六個極點，即：

$z=e^{i\pi/6}$ 、 $z=e^{i3\pi/6}$ 、 $z=e^{i5\pi/6}$ 、 $z=e^{i7\pi/6}$ 、 $z=e^{i9\pi/6}$ 、 $z=e^{i11\pi/6}$

這六個極點中有三個極點 $z=e^{i7\pi/6}$ 、 $z=e^{i9\pi/6}$ 與 $z=e^{i11\pi/6}$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示，且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz=-2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，因積分方向為順鐘向，故加負號；此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\ ；}$ $\boxed{❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i7\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i9\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i11\pi/6}} \frac{1}{z^6+1} \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i7\pi/6}} - 2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i9\pi/6}} - 2\pi i \left.\frac{1}{(z^6+1)'}\right|_{z=e^{i11\pi/6}} \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i7\pi/6}} - 2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i9\pi/6}} - 2\pi i \left.\frac{1}{6z^5}\right|_{z=e^{i11\pi/6}} \\
&= -2\pi i \frac{1}{6(e^{i7\pi/6})^5} - 2\pi i \frac{1}{6(e^{i9\pi/6})^5} - 2\pi i \frac{1}{6(e^{i11\pi/6})^5} \\
&= -2\pi i \frac{1}{6e^{i35\pi/6}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{i45\pi/6}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{i55\pi/6}} \\
&= -2\pi i \frac{1}{6e^{i(-\pi/6+6\pi)}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{i(-3\pi/6+8\pi)}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{i(-5\pi/6+10\pi)}} \\
&= -2\pi i \frac{1}{6e^{-i\pi/6}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{-i3\pi/6}} - 2\pi i \frac{1}{6e^{-i5\pi/6}} \\
&= -2\pi i \frac{e^{i\pi/6}}{6} - 2\pi i \frac{e^{i3\pi/6}}{6} - 2\pi i \frac{e^{i5\pi/6}}{6} \\
&= -\frac{\pi i}{3}\left(e^{i\pi/6} + e^{i3\pi/6} + e^{i5\pi/6}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + (i) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{\pi i}{3}(i+i) \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^6+1}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{1}{z^6+1}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{z^6+1}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
}
$$

故以此方式亦可證明出相同的結果。