提要 384：以複變分析解析實數函數由 0 至∞的線積分問題(2)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**（**Improper Integral**）問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第二個複變分析在 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_0^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{\pi}{12}$ 。

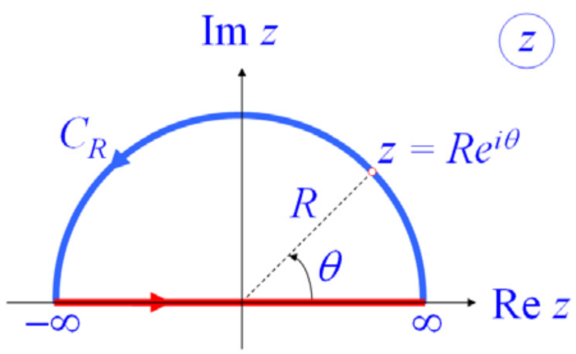
【證明】

因為 $\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ 是**偶函數**（**Even Function**），所以：

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$$

以下說明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$ 的解析方式，最後再將結果除以 2，即可求出問題之解。

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_{C} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta \le \pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2-1}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2-1}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{R(Re^{i\theta})^2-R}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{e^{i2\theta}-(1/R^2)}{Re^{i4\theta}+5e^{i2\theta}/R+4/R^3}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{e^{i2\theta}-(1/\infty^2)}{(\infty)e^{i4\theta}+5(e^{i2\theta}/\infty)+(4/\infty^3)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(e^{i2\theta}-0)(ie^{i\theta})}{\infty+0+0}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

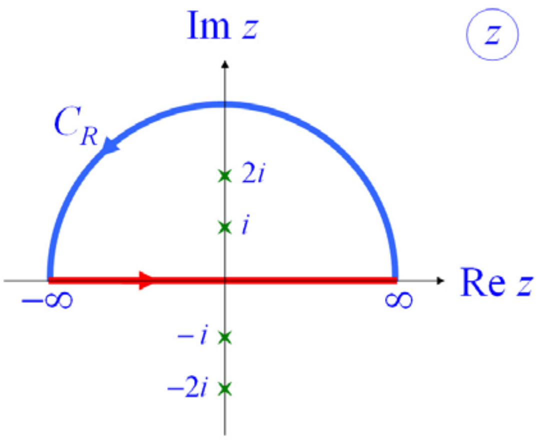
首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $z^4+5z^2+4=0$，此一元四次方程式可因式分解為 $(z^2+1)(z^2+4)=0$，故：

$$(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)=0$$

所以問題之四個極點為：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-2i \text{ 、 } z=2i$$

這四個極點中僅兩個極點落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。



圖二　四個極點中有兩個落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$

求解，此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

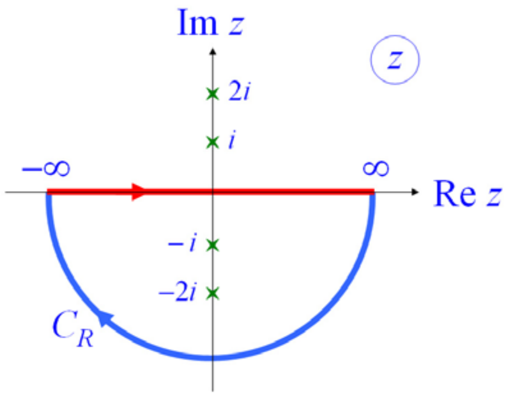
$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} \\
&= 2\pi i \left.\frac{z^2-1}{(z^4+5z^2+4)'}\right|_{z=i} + 2\pi i \left.\frac{z^2-1}{(z^4+5z^2+4)'}\right|_{z=2i} \\
&= 2\pi i \left.\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=i} + 2\pi i \left.\frac{z^2-1}{4z^3+10z}\right|_{z=2i} \\
&= 2\pi i \frac{(i)^2-1}{4(i)^3+10(i)} + 2\pi i \frac{(2i)^2-1}{4(2i)^3+10(2i)} \\
&= 2\pi i \frac{-1-1}{-4i+10i} + 2\pi i \frac{-4-1}{-32i+20i} \\
&= 2\pi i \frac{-2}{6i} + 2\pi i \frac{-5}{-12i} \\
&= 2\pi\left(\frac{-1}{3}\right) + 2\pi\left(\frac{5}{12}\right) \\
&= -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz - \int_{C_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right) \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
}
$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論知，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{3}$$

其積分方向均為**順鐘向**，故討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值時需變號。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } -\pi \le \theta \le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2-1}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2-1}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{R(Re^{i\theta})^2-R}{(Re^{i\theta})^4+5(Re^{i\theta})^2+4}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{-\pi} \frac{e^{i2\theta}-(1/R^2)}{Re^{i4\theta}+5e^{i2\theta}/R+4/R^3}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{e^{i2\theta}-(1/\infty^2)}{(\infty)e^{i4\theta}+5(e^{i2\theta}/\infty)+(4/\infty^3)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{(e^{i2\theta}-0)(ie^{i\theta})}{\infty+0+0}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

根據前面之研討知，本問題有四個極點，即：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-2i \text{ 、 } z=2i$$

這四個極點中僅兩個極點 $z=-i$ 與 $z=-2i$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示。且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = -2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，因積分方向為順鐘向，故加負號；此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\ ;}$ $\boxed{❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$

$$= -2\pi i \frac{z^2-1}{(z^4+5z^2+4)'}\bigg|_{z=-i} - 2\pi i \frac{z^2-1}{(z^4+5z^2+4)'}\bigg|_{z=-2i}$$

$$= -2\pi i \frac{z^2-1}{4z^3+10z}\bigg|_{z=-i} - 2\pi i \frac{z^2-1}{4z^3+10z}\bigg|_{z=-2i}$$

$$= -2\pi i \frac{(-i)^2-1}{4(-i)^3+10(-i)} - 2\pi i \frac{(-2i)^2-1}{4(-2i)^3+10(-2i)}$$

$$= -2\pi i \frac{-1-1}{4i-10i} - 2\pi i \frac{-4-1}{32i-20i}$$

$$= -2\pi i \frac{-2}{6i} - 2\pi i \frac{-5}{-12i}$$

$$= -2\pi \left(\frac{-1}{3}\right) - 2\pi \left(\frac{5}{12}\right)$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\oint_C \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz - \int_{C_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) \\
&= \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

故以此方式亦可證明出相同的結果。