

提要 383：以複變分析解析實數函數由 0 至 ∞ 的線積分問題(1)

作者擬以五個應用範例說明 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分 (Improper Integral)** 問題，再以五個應用範例說明 $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第一個複變分析在 $I = \int_0^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一

$$\text{試證明 } \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

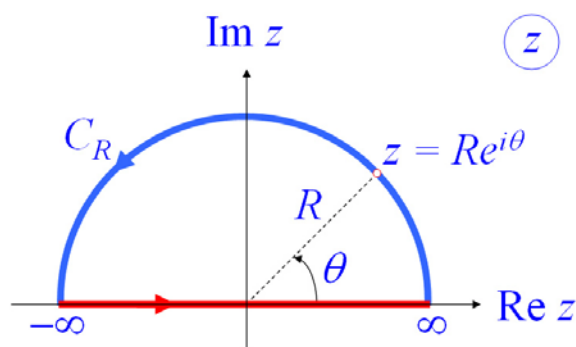
【證明】

因為 $\frac{1}{1+x^4}$ 是**偶函數 (Even Function)**，所以

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

以下說明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ 的解析方式，最後再將結果除以 2，即可求出問題之解。

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一 實數軸上之線積分方式的改寫：
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz$$

由前一單元的討論，並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (1)$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_C f(z) dz$ 與 $\int_{C_R} f(z) dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z) dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{i\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2)$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z) dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4} d(Re^{i\theta}) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4} (iRe^{i\theta} d\theta) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(1/R) + (R^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{(1/\infty) + (\infty^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{0 + \infty} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

② 關於 $\oint_C f(z) dz$ 的積分值

首先須找出落在積分曲線 C 內之極點 (Pole)，故先考慮積分函數之分母為零，即 $1+z^4=0$ ，故：

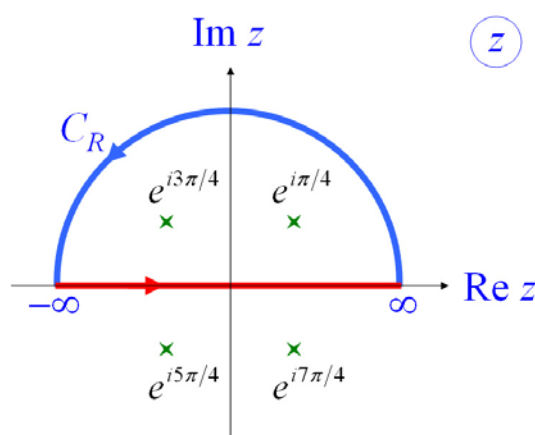
$$z^4 = -1 = e^{i(\pi+2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

上式取四次方根，即可找出四個極點：

$$z = e^{i(\pi+2n\pi)/4} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

- ★ 當 $n=0$ 時， $z = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- ★ 當 $n=1$ 時， $z = e^{i3\pi/4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- ★ 當 $n=2$ 時， $z = e^{i5\pi/4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。
- ★ 當 $n=3$ 時， $z = e^{i7\pi/4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

其他情況下所得出之解均為上述四個根之重複情況，故可以不必再討論其他 n 值所對應之根；這四個極點中僅兩個極點落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。且這些極點都是單極點 (Simple Pole)。



圖二 四個極點中有兩個落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理 (Residue Theorem)** 及單極點的計算公式 $\oint_C \frac{p(z)}{q(z)} dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

求解，此公式之應用需滿足的條件為：**❶** $p(z_0) \neq 0$ ；**❷** z_0 為 C 內之單極點。基於此，可知：

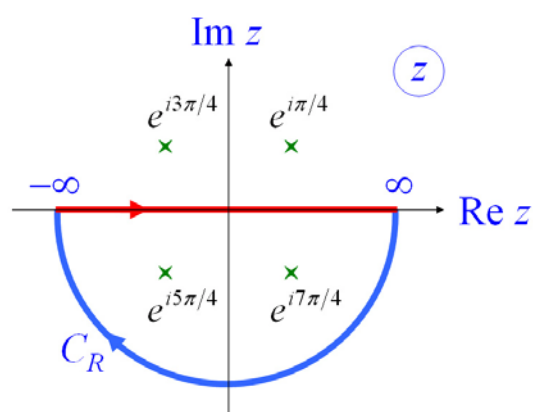
$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z) dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} + 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \\
 &= 2\pi i \frac{1}{(1+z^4)'} \Big|_{z=e^{i\pi/4}} + 2\pi i \frac{1}{(1+z^4)'} \Big|_{z=e^{i3\pi/4}} \\
 &= 2\pi i \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\pi/4}} + 2\pi i \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i3\pi/4}} \\
 &= 2\pi i \frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} + 2\pi i \frac{1}{4(e^{i3\pi/4})^3} \\
 &= 2\pi i \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} + 2\pi i \frac{1}{4e^{i9\pi/4}} \\
 &= \frac{\pi i}{2} e^{-i3\pi/4} + \frac{\pi i}{2} e^{-i9\pi/4} \\
 &= \frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right) + \frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} - i \sin \frac{9\pi}{4} \right) \\
 &= \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\pi i}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi i}{2} \left(-i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\pi i}{2} \left(-i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi
 \end{aligned}$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\oint_C \frac{1}{1+z^4} dz - \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi - 0 \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi\end{aligned}$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三 實數軸上之線積分方式的改寫：
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz$$

由前一單元的討論，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \oint_C f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (3)$$

其積分方向均為**順鐘向**，故討論 $\oint_C f(z) dz$ 與 $\int_{C_R} f(z) dz$ 的積分值時需變號。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z) dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{i\theta} \quad , \quad -\pi \leq \theta \leq 0 \quad (4)$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z) dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4} d(Re^{i\theta}) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4} (iRe^{i\theta} d\theta) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{-\pi} \frac{1}{(1/R) + (R^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{-\pi} \frac{1}{(1/\infty) + (\infty^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\ &= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\theta}}{0 + \infty} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z) dz$ 的積分值

根據前面之研討知，本問題有四個極點，即：

$$z = e^{i\pi/4} \quad , \quad z = e^{i3\pi/4} \quad , \quad z = e^{i5\pi/4} \quad , \quad z = e^{i7\pi/4}$$

這四個極點中僅兩個極點 $z = e^{i5\pi/4}$ 與 $z = e^{i7\pi/4}$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示。且這些極點都是單極點 (Simple Pole)。

可引用**殘值定理 (Residue Theorem)** 及單極點的計算公式 $\oint_C \frac{p(z)}{q(z)} dz = -2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

求解，因積分方向為順鐘向，故加負號；此公式之應用需滿足的條件為：**①** $p(z_0) \neq 0$ ；

② z_0 為 C 內之單極點。基於此，可知：

$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z) dz &= -2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} - 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \\
 &= -2\pi i \frac{1}{(1+z^4)'} \Big|_{z=e^{i5\pi/4}} - 2\pi i \frac{1}{(1+z^4)'} \Big|_{z=e^{i7\pi/4}} \\
 &= -2\pi i \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i5\pi/4}} - 2\pi i \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i7\pi/4}} \\
 &= -2\pi i \frac{1}{4(e^{i5\pi/4})^3} - 2\pi i \frac{1}{4(e^{i7\pi/4})^3} \\
 &= -2\pi i \frac{1}{4e^{i15\pi/4}} - 2\pi i \frac{1}{4e^{i21\pi/4}} \\
 &= -\frac{\pi i}{2} e^{-i15\pi/4} - \frac{\pi i}{2} e^{-i21\pi/4} \\
 &= -\frac{\pi i}{2} e^{i\pi/4} - \frac{\pi i}{2} e^{i3\pi/4} \\
 &= -\frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= -\frac{\pi i}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= -\frac{\pi i}{2} \left(i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\pi i}{2} \left(i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi + \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi
 \end{aligned}$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4} dz \\
&= \frac{1}{2} \left(\oint_C \frac{1}{1+z^4} dz - \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4} dz \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi - 0 \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi
\end{aligned}$$

故以此方式亦可證明出相同的結果。