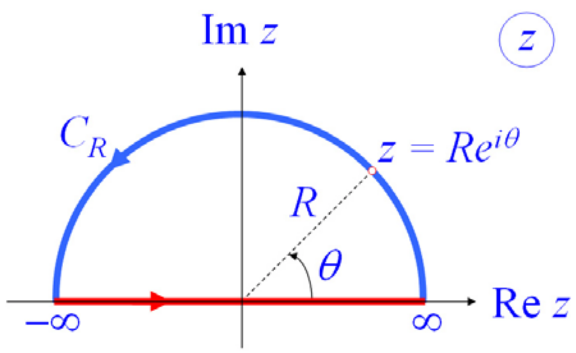
提要 381：以複變分析解析實數函數由−∞至∞的線積分問題(4)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**（**Improper Integral**）問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第四個複變分析在 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}dx=\frac{\pi}{2}$ 。

【證明】

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z=\lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0\le\theta\le\pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R}\frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz \\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{[(Re^{i\theta})^2+4(Re^{i\theta})+5]^2}\,d(Re^{i\theta}) \\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+4Re^{i\theta}+5)^2}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{[Re^{i2\theta}+4e^{i\theta}+(5/R)](R^2e^{i2\theta}+4Re^{i\theta}+5)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&=\int_0^{\pi}\frac{1}{[(\infty)e^{i2\theta}+4e^{i\theta}+(5/\infty)][(\infty)^2e^{i2\theta}+4(\infty)e^{i\theta}+5]}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\theta}}{[\infty+4e^{i\theta}+(0)](\infty+\infty+5)}\,d\theta \\
&=0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

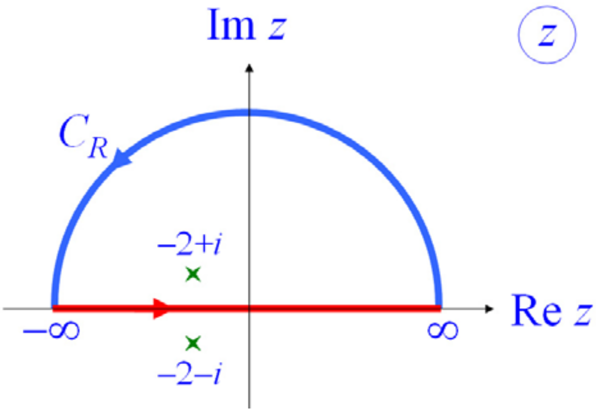
首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $(z^2+4z+5)^2=0$，此一元四次方程式可因式分解為：

$$[z-(-2+i)]^2[z-(-2-i)]^2=0$$

所以問題之兩個極點為：

$$z=-2+i \text{ 、 } z=-2-i$$

這兩個極點中僅一個極點落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示，這兩個極點均為**二階極點（Pole of Order Two）**。



圖二　二階極點 $z=-2+i$ 落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**與二階極點的計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz=2\pi i\lim_{z\to z_0}\frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$ 求解，其中二階極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+i} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i} \frac{d}{dz}\left\{ [z-(-2+i)]^2 \frac{1}{(z^2+4z+5)^2} \right\}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i} \frac{d}{dz}\left\{ \frac{1}{[z-(-2-i)]^2} \right\}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to -2+i} \left\{ \frac{-2}{[z-(-2-i)]^3} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{-2}{[(-2+i)-(-2-i)]^3} \right\}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-2}{(2i)^3} \right]$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-2}{-8i} \right)$$

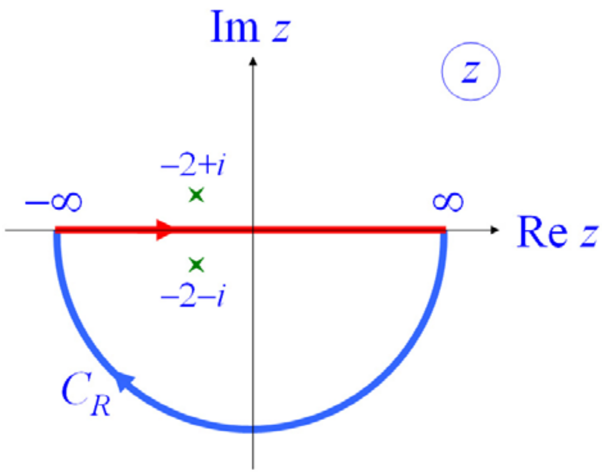
$$= \frac{\pi}{2}$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$\boxed{\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz \\ &= \oint_C \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論知，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{3}$$

其積分方向均為**順鐘向**，茲再分別討論$\oint_C f(z)\,dz$與$\int_{C_R} f(z)\,dz$的積分值。

❶ 關於$\int_{C_R} f(z)\,dz$的積分值

如圖三所示，積分曲線C_R可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{、} -\pi \le \theta \le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式$\int_{C_R} f(z)\,dz$改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{[(Re^{i\theta})^2+4(Re^{i\theta})+5]^2}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+4Re^{i\theta}+5)^2}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{1}{[Re^{i2\theta}+4e^{i\theta}+(5/R)](R^2e^{i2\theta}+4Re^{i\theta}+5)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{1}{[(\infty)e^{i2\theta}+4e^{i\theta}+(5/\infty)][(\infty)^2e^{i2\theta}+4(\infty)e^{i\theta}+5]}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i\theta}}{[\infty+4e^{i\theta}+(0)](\infty+\infty+5)}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

由之前之討論知，問題之兩個極點為：

$$z=-2+i \text{ 、 } z=-2-i$$

這兩個極點中僅一個極點 $z=-2-i$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示且此極點為 **二階極點（Pole of Order Two）**。可引用 **殘值定理（Residue Theorem）** 與二階極點的計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0} \frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$ 推求其解，其中二階極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$ 基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2-i} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2} \\
&= -2\pi i \lim_{z\to -2-i} \frac{d}{dz}\left\{ [z-(-2-i)]^2 \frac{1}{(z^2+4z+5)^2} \right\} \\
&= -2\pi i \lim_{z\to -2-i} \frac{d}{dz}\left\{ \frac{1}{[z-(-2+i)]^2} \right\} \\
&= -2\pi i \lim_{z\to -2-i} \left\{ \frac{-2}{[z-(-2+i)]^3} \right\} \\
&= -2\pi i \left\{ \frac{-2}{[(-2-i)-(-2+i)]^3} \right\} \\
&= -2\pi i \left[\frac{-2}{(-2i)^3} \right] \\
&= -2\pi i \left(\frac{-2}{8i} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz
&= \oint_C \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{(z^2+4z+5)^2}\,dz \\
&= \frac{\pi}{2} - 0 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
}
$$

故得證。