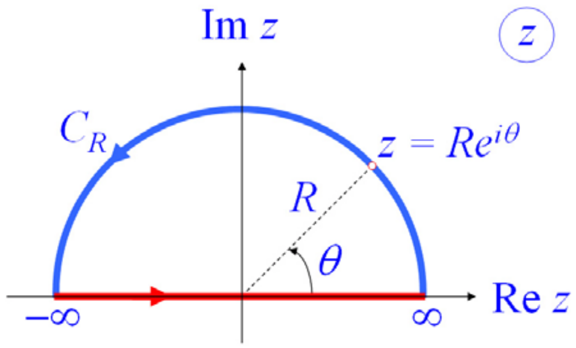
提要 380：以複變分析解析實數函數由−∞至∞的線積分問題(3)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**（**Improper Integral**）問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第三個複變分析在 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx=\frac{7\pi}{50}$ 。

【證明】

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線C_R可表為：

$$z=\lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0\le\theta\le\pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz\\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{(Re^{i\theta})^2}{[(Re^{i\theta})^2+1]^2[(Re^{i\theta})^2+2(Re^{i\theta})+2]}d(Re^{i\theta})\\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{R^2e^{i2\theta}}{(R^4e^{i4\theta}+2R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(iRe^{i\theta}d\theta)\\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{R^3e^{i2\theta}}{(R^4e^{i4\theta}+2R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\theta}}{[Re^{i4\theta}+2(e^{i2\theta}/R)+1/R^3](R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\int_0^{\pi}\frac{e^{i2\theta}}{[(\infty)e^{i4\theta}+2(e^{i2\theta}/\infty)+1/\infty^3][\infty^2e^{i2\theta}+2(\infty)e^{i\theta}+2]}(ie^{i\theta}d\theta)\\
&=\int_0^{\pi}\frac{ie^{i3\theta}}{(\infty+0+0)(\infty+\infty+2)}d\theta\\
&=0
\end{aligned}$$

❷ 關於$\oint_C f(z)\,dz$的積分值

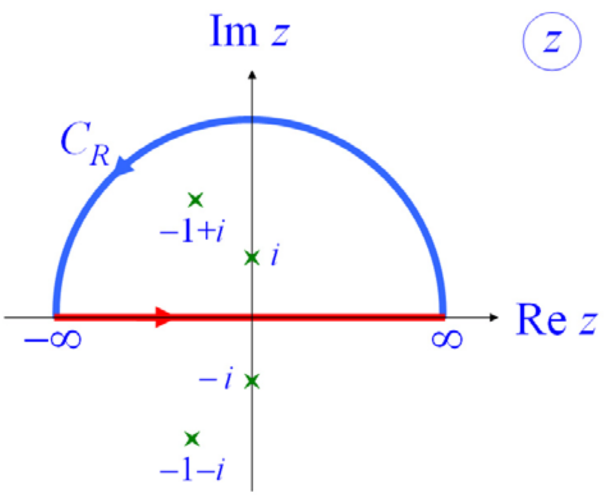
首先須找出落在積分曲線C內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即$(z^2+1)^2(z^2+2z+2)=0$，此一元六次方程式可因式分解為：

$$(z+i)^2(z-i)^2\left[z-(-1+i)\right]\left[z-(-1-i)\right]=0$$

所以問題之四個極點為：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-1+i \text{ 、 } z=-1-i$$

這四個極點中僅兩個極點落在封閉積分曲線C之內部，如圖二所示。其中極點$z=-1+i$與$z=-1-i$是**單極點（Simple Pole）**；極點$z=-i$與$z=i$是**二階極點（Pole of Order Two）**。



圖二　四個極點中$z=-1+i$與$z=i$落在積分曲線C之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**、單極點的計算公式$\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$、二階極點的計算公式$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0} \frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$求解。其中單極點的計算公

式需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0；❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點；}}$二階極點的計算公式需滿足的

條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$基於此，可知：

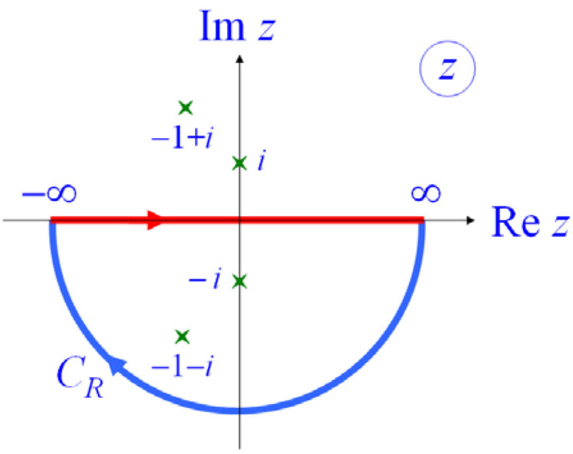
$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right] + 2\pi i \left.\frac{z^2}{[(z^2+1)^2(z^2+2z+2)]'}\right|_{z=-1+i} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right] \\
&\quad + 2\pi i \left.\frac{z^2}{[2(z^2+1)(2z)](z^2+2z+2)+(z^2+1)^2(2z+2)}\right|_{z=-1+i} \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i}\left[\frac{2z}{(z+i)^2(z^2+2z+2)} - \frac{2z^2}{(z+i)^3(z^2+2z+2)} - \frac{z^2(2z+2)}{(z+i)^2(z^2+2z+2)^2}\right] \\
&\quad + \frac{(2\pi i)(-1+i)^2}{2[(-1+i)^2+1][2(-1+i)][(-1+i)^2+2(-1+i)+2]+[(-1+i)^2+1]^2[2(-1+i)+2]} \\
&= 2\pi i\left[\frac{2i}{(i+i)^2(i^2+2i+2)} - \frac{2i^2}{(i+i)^3(i^2+2i+2)} - \frac{i^2(2i+2)}{(i+i)^2(i^2+2i+2)^2}\right] \\
&\quad + \frac{(2\pi i)(-2i)}{2(-2i+1)(-2+2i)[-2i+2(-1+i)+2]+(-2i+1)^2(2i)} \\
&= 2\pi i\left[\frac{2i}{(2i)^2(-1+2i+2)} - \frac{-2}{(2i)^3(-1+2i+2)} - \frac{-(2i+2)}{(2i)^2(-1+2i+2)^2}\right] \\
&\quad + \frac{4\pi}{2(2+6i)(0)+(-3-4i)(2i)} \\
&= 2\pi i\left[\frac{2i}{(-4)(1+2i)} - \frac{-2}{(-8i)(1+2i)} - \frac{-(2i+2)}{(-4)(1+2i)^2}\right] + \frac{4\pi}{8-6i} \\
&= 2\pi i\left[\frac{2i(1-2i)}{(-4)(1+2i)(1-2i)} - \frac{-2(1-2i)}{(-8i)(1+2i)(1-2i)} - \frac{-(2i+2)(-3-4i)}{(-4)(-3+4i)(-3-4i)}\right] \\
&\quad + \frac{4\pi(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} \\
&= 2\pi i\left[\frac{2i(1-2i)}{(-4)(5)} - \frac{-2(1-2i)}{(-8i)(5)} - \frac{-(2i+2)(-3-4i)}{(-4)(25)}\right] + \frac{4\pi(8+6i)}{100} \\
&= \frac{2\pi i(-20-10i+10+5i-2+14i)}{100} + \frac{32\pi+24\pi i}{100} \\
&= \frac{7\pi}{50}
\end{aligned}
$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz \\
&= \oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz - \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz \\
&= \frac{7\pi}{50} - 0 \\
&= \frac{7\pi}{50}
\end{aligned}
$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由之前的討論知，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \tag{3}$$

其積分方向均為**順鐘向**，茲再分別討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{、} -\pi \le \theta \le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{(Re^{i\theta})^2}{[(Re^{i\theta})^2+1]^2[(Re^{i\theta})^2+2(Re^{i\theta})+2]}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{R^2e^{i2\theta}}{(R^4e^{i4\theta}+2R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{R^3e^{i2\theta}}{(R^4e^{i4\theta}+2R^2e^{i2\theta}+1)(R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi} \frac{e^{i2\theta}}{[Re^{i4\theta}+2(e^{i2\theta}/R)+1/R^3](R^2e^{i2\theta}+2Re^{i\theta}+2)}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{e^{i2\theta}}{[(\infty)e^{i4\theta}+2(e^{i2\theta}/\infty)+1/\infty^3][\infty^2e^{i2\theta}+2(\infty)e^{i\theta}+2]}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi} \frac{ie^{i3\theta}}{(\infty+0+0)(\infty+\infty+2)}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}
$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

由之前之討論知，問題之四個極點為：

$$z=-i \text{ 、 } z=i \text{ 、 } z=-1+i \text{ 、 } z=-1-i$$

這四個極點中僅兩個極點落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示。其中極點 $z=-1+i$ 與 $z=-1-i$ 是**單極點（Simple Pole）**；極點 $z=-i$ 與 $z=i$ 是**二階極點（Pole of Order Two）**。可引用**殘值定理（Residue Theorem）**、單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$、二階極點的計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\frac{d\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}{dz}}$ 求解。其中單極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0\text{；}❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點；}}$ 二階極點的計算公式需滿足的條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$ 基於此，可知：

$$\oint_C f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1-i} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[(z+i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right] - 2\pi i \left.\frac{z^2}{[(z^2+1)^2(z^2+2z+2)]'}\right|_{z=-1-i}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z-i)^2(z^2+2z+2)}\right]$$

$$-2\pi i \left.\frac{z^2}{[2(z^2+1)(2z)](z^2+2z+2)+(z^2+1)^2(2z+2)}\right|_{z=-1-i}$$

$$= -2\pi i \lim_{z\to -i}\left[\frac{2z}{(z-i)^2(z^2+2z+2)} - \frac{2z^2}{(z-i)^3(z^2+2z+2)} - \frac{z^2(2z+2)}{(z-i)^2(z^2+2z+2)^2}\right]$$

$$-\frac{(2\pi i)(-1-i)^2}{2[(-1-i)^2+1][2(-1-i)][(-1-i)^2+2(-1-i)+2]+[(-1-i)^2+1]^2[2(-1-i)+2]}$$

$$= -2\pi i\left[\frac{2(-i)}{(-i-i)^2[(-i)^2+2(-i)+2]} - \frac{2(-i)^2}{(-i-i)^3[(-i)^2+2(-i)+2]}\right.$$

$$\left. - \frac{(-i)^2[2(-i)+2]}{(-i-i)^2[(-i)^2+2(-i)+2]^2}\right]$$

$$-\frac{(2\pi i)(2i)}{2(2i+1)(-2-2i)[2i+2(-1-i)+2]+(2i+1)^2(-2i)}$$

$$= -2\pi i\left[\frac{-2i}{(-2i)^2(-1-2i+2)} - \frac{-2}{(-2i)^3(-1-2i+2)} - \frac{-(-2i+2)}{(2i)^2(-1-2i+2)^2}\right]$$

$$-\frac{-4\pi}{2(2-6i)(0)+(-3+4i)(-2i)}$$

$$= -2\pi i\left[\frac{-2i}{(-4)(1-2i)} - \frac{-2}{(8i)(1-2i)} - \frac{-(-2i+2)}{(-4)(1-2i)^2}\right] + \frac{4\pi}{8+6i}$$

$$= -2\pi i\left[\frac{2i(1+2i)}{(-4)(1-2i)(1+2i)} - \frac{-2(1+2i)}{(8i)(1-2i)(1+2i)} - \frac{-(-2i+2)(-3+4i)}{(-4)(-3-4i)(-3+4i)}\right]$$

$$+\frac{4\pi(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}$$

$$= -2\pi i\left[\frac{2i(1+2i)}{(-4)(5)} - \frac{-2(1+2i)}{(8i)(5)} - \frac{-(-2i+2)(-3+4i)}{(-4)(25)}\right] + \frac{4\pi(8-6i)}{100}$$

$$= -\frac{2\pi i(-20+10i+10-5i-2-14i)}{100} + \frac{32\pi-24\pi i}{100}$$

$$= \frac{7\pi}{50}$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz \\
&= \oint_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz - \int_{C_R} \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz \\
&= \frac{7\pi}{50} - 0 \\
&= \frac{7\pi}{50}
\end{aligned}
$$

故得證。