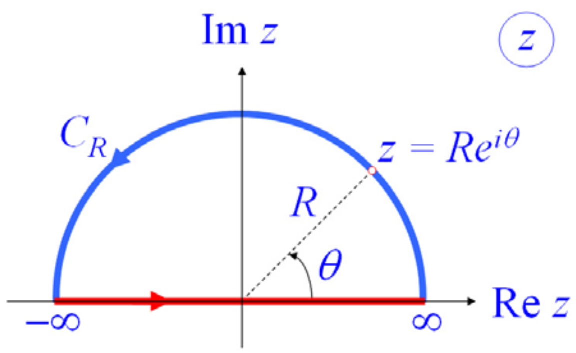
提要 378：以複變分析解析實數函數由$-\infty$至∞的線積分問題(1)

作者擬以五個應用範例說明 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分（Improper Integral）**問題，再以五個應用範例說明 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)dx$ 的**瑕積分**問題。以下為第一個複變分析在 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ 的應用範例。

範例一
試證明 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 。

【證明】

■ 解法一：上半平面之線積分方式



圖一　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

由前一單元的討論，並根據圖一所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_C f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz \tag{1}$$

其積分方向均為**逆鐘向**，再分別討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖一所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z = \lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta \le \pi \tag{2}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4}\, d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4} (iRe^{i\theta} d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{1}{(1/R)+(R^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{(1/\infty)+(\infty^3 e^{i4\theta})} (ie^{i\theta} d\theta) \\
&= \int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}}{0+\infty}\, d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

首先須找出落在積分曲線 C 內之**極點（Pole）**，故先考慮積分函數之分母為零，即 $1+z^4=0$，故：

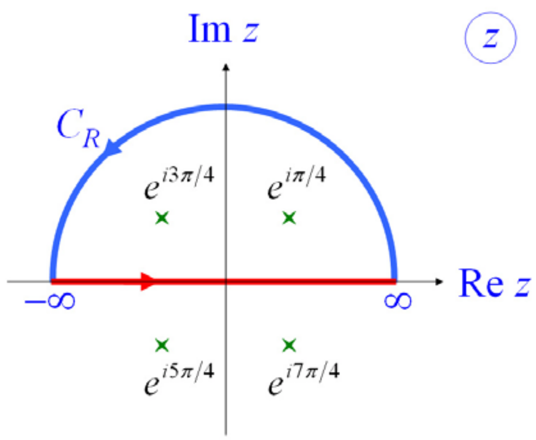
$$z^4=-1=e^{i(\pi+2n\pi)}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

上式取四次方根，即可找出四個極點：

$$z=e^{i(\pi+2n\pi)/4}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

- 當 $n=0$ 時，$z=e^{i\pi/4}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。
- 當 $n=1$ 時，$z=e^{i3\pi/4}=\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。
- 當 $n=2$ 時，$z=e^{i5\pi/4}=\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。
- 當 $n=3$ 時，$z=e^{i7\pi/4}=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

其他情況下所得出之解均為上述四個根之重複情況，故可以不必再討論其他 n 值所對應之根；這四個極點中僅兩個極點落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖二所示。且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。



圖二　四個極點中有兩個落在積分曲線 C 之內部

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式$\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$求解，此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

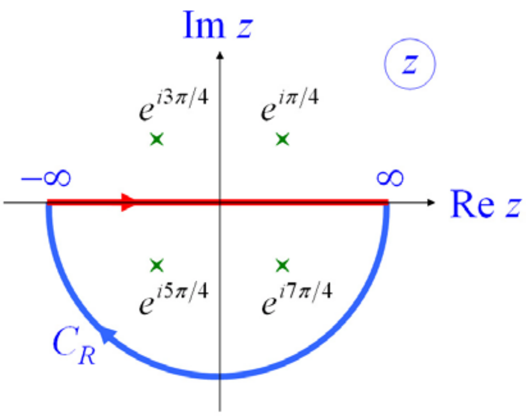
$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \\
&= 2\pi i \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{i\pi/4}} + 2\pi i \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{i3\pi/4}} \\
&= 2\pi i \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}} + 2\pi i \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i3\pi/4}} \\
&= 2\pi i\frac{1}{4(e^{i\pi/4})^3} + 2\pi i\frac{1}{4(e^{i3\pi/4})^3} \\
&= 2\pi i\frac{1}{4e^{i3\pi/4}} + 2\pi i\frac{1}{4e^{i9\pi/4}} \\
&= \frac{\pi i}{2}e^{-i3\pi/4} + \frac{\pi i}{2}e^{-i9\pi/4} \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} - i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi i}{2}\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi i}{2}\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

因此可根據式(1)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+z^4}\,dz = \oint_C\frac{1}{1+z^4}\,dz - \int_{C_R}\frac{1}{1+z^4}\,dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi}
$$

故得證。

■ 解法二：下半平面之線積分方式



圖三　實數軸上之線積分方式的改寫：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz$

由前一單元的討論，亦可取下半平面之線積分推求出問題之解，根據圖三所示之積分觀念知：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz \qquad (3)$$

其積分方向均為**順鐘向**，故討論 $\oint_C f(z)\,dz$ 與 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值時需變號。

❶ 關於 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 的積分值

如圖三所示，積分曲線 C_R 可表為：

$$z=\lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} \text{ 、 } -\pi\le\theta\le 0 \tag{4}$$

可據此將積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} f(z)\,dz &= \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi}\frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4}\,d(Re^{i\theta}) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi}\frac{1}{1+(Re^{i\theta})^4}(iRe^{i\theta}d\theta) \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{-\pi}\frac{1}{(1/R)+(R^3e^{i4\theta})}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi}\frac{1}{(1/\infty)+(\infty^3e^{i4\theta})}(ie^{i\theta}d\theta) \\
&= \int_0^{-\pi}\frac{ie^{i\theta}}{0+\infty}\,d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

❷ 關於 $\oint_C f(z)\,dz$ 的積分值

根據前面之研討知，本問題有四個極點，即：

$$z=e^{i\pi/4} \text{ 、 } z=e^{i3\pi/4} \text{ 、 } z=e^{i5\pi/4} \text{ 、 } z=e^{i7\pi/4}$$

這四個極點中僅兩個極點 $z=e^{i5\pi/4}$ 與 $z=e^{i7\pi/4}$ 落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖三所示。且這些極點都是**單極點（Simple Pole）**。

可引用**殘值定理（Residue Theorem）**及單極點的計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = -2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，因積分方向為順鐘向，故加負號；此公式之應用需滿足的條件為：$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0}$；$\boxed{❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,dz &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} - 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=e^{i3\pi/4}} \frac{1}{1+z^4} \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{i5\pi/4}} - 2\pi i \left.\frac{1}{(1+z^4)'}\right|_{z=e^{i7\pi/4}} \\
&= -2\pi i \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i5\pi/4}} - 2\pi i \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{i7\pi/4}} \\
&= -2\pi i \frac{1}{4(e^{i5\pi/4})^3} - 2\pi i \frac{1}{4(e^{i7\pi/4})^3} \\
&= -2\pi i \frac{1}{4e^{i15\pi/4}} - 2\pi i \frac{1}{4e^{i21\pi/4}} \\
&= -\frac{\pi i}{2} e^{-i15\pi/4} - \frac{\pi i}{2} e^{-i21\pi/4} \\
&= -\frac{\pi i}{2} e^{i\pi/4} - \frac{\pi i}{2} e^{i3\pi/4} \\
&= -\frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi i}{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

因此可根據式(3)所示之關係式，證明出問題所給之解是正確的，亦即：

$$
\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4}\,dz = \oint_C \frac{1}{1+z^4}\,dz - \int_{C_R} \frac{1}{1+z^4}\,dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi}
$$

故以此方式亦可證明出相同的結果。