提要 377：以複變分析解析實數函數由$-\infty$至∞的線積分

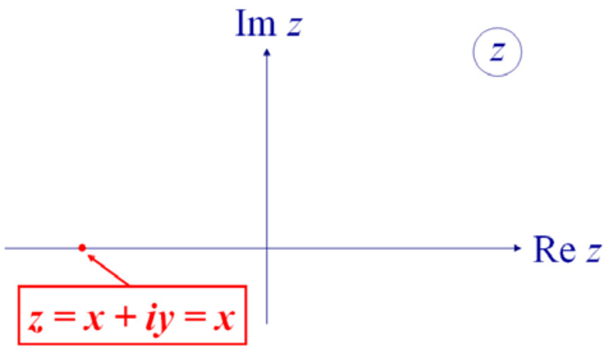
有一類的線積分問題與實數函數由$-\infty$至∞之**瑕積分（Improper Integral）**有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數x作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數z有關之線積分，則容易許多，說明如下。

已知在如圖一所示複數平面之水平軸上的任意點均可表為$z = x + iy$，其中x稱為 **z之實部（Real Part of z）**，y稱為 **z之虛部（Imaginary Part of z）**。因為水平軸為實數軸，且水平軸上每一個點之虛部均為0，故：

$$z = x + iy = x + i(0) = x \tag{2}$$



圖一　因複數平面水平軸上的每一個點之虛部均為0，故$z = x$

因此式(1)可改寫為：

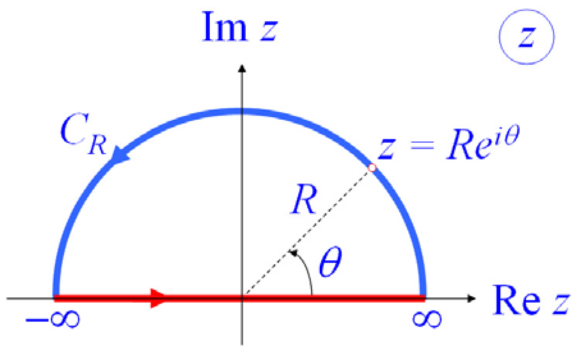
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \tag{3}$$

■ 上半平面之線積分

式(3)是擬於複數平面上作實數軸上之線積分。如圖二所示，可將實數軸上之線積分改寫為封閉曲線之線積分減去半圓之線積分，即：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz=\oint_{C} f(z)dz-\int_{C_R} f(z)dz \tag{4}$$

式(4)所示積分曲線 C 與 C_R 的積分方向均為**逆鐘向**，且 $R\to\infty$。



圖二　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_{C} f(z)\,dz-\int_{C_R} f(z)\,dz$

通常積分式 $\int_{C_R} f(z)\,dz$ 中之 $f(z)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，且 $O(q(z))-O(p(z))\geq 2$，故：

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}|f(z)|\,dz\leq\lim_{R\to\infty}|f(z)||\pi R|=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{R^2}(\pi R)=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi k}{R}=0 \tag{5}$$

所以：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\oint_{C} f(z)\,dz} \tag{6}$$

其中積分式 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 之積分方式已教過至少五種以上的解析方法，讀者應有能力加以解析，故式(1)所示問題之解即可推導出。若已知積分式 $\oint_{C} f(z)\,dz$ 之封閉積分路徑 C 中有 n 個極點 $z_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，則可引用**殘值定理（Residue Theorem）**，再將式(6)改寫為：

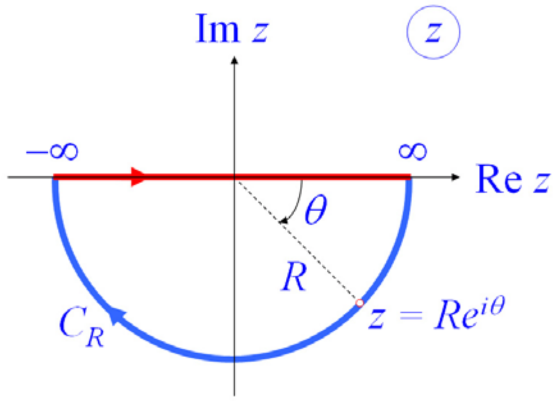
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n}2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)} \tag{7}$$

■ 下半平面之線積分

式(3)至式(7)之解析是考慮上半平面之線積分，若考慮下半平面之線積分，如圖三所示，則亦可將實數軸上之線積分改寫為封閉曲線之線積分減去半圓之線積分，即：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\oint_{C}f(z)dz-\int_{C_R}f(z)dz \tag{8}$$

但式(8)中積分曲線 C 與 C_R 的積分方向均為**順鐘向**，且 $R\to\infty$。



圖三　實數軸上之線積分改寫方式：$\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=\oint_{C}f(z)\,dz-\int_{C_R}f(z)\,dz$

通常積分式 $\int_{C_R}f(z)\,dz$ 中之 $f(z)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$，且 $O(q(z))-O(p(z))\geq 2$，故：

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}f(z)\,dz\right|\leq\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}|f(z)|\,dz\leq\lim_{R\to\infty}|f(z)||\pi R|=\lim_{R\to\infty}\frac{k}{R^2}(\pi R)=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi k}{R}=0 \tag{9}$$

所以：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=\oint_{C}f(z)\,dz} \tag{10}$$

其中積分式 $\oint_{C}f(z)\,dz$ 之積分方式已學過至少五種以上的解析方法，讀者應有能力加以解析，故式(1)所示問題之解即可推導出。若已知積分式 $\oint_{C}f(z)\,dz$ 之封閉積分路徑 C 中有 n 個極點 $z_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，則可引用**殘值定理**，再將式(10)改寫為：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = -\sum_{j=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)} \tag{11}$$

上式加負號的原因是因積分方向為順鐘向。