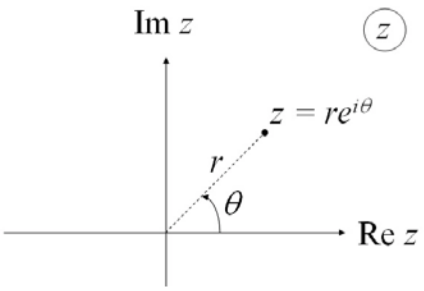
提要 376：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分問題(5)

第 1~2 頁的說明與前一單元相同。亦即有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

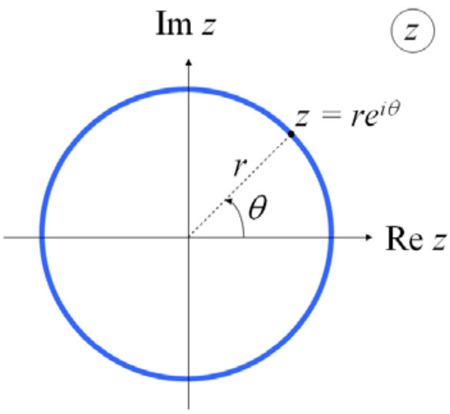
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$，其中 r 稱為大小 (Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z = re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta}\text{ 、 }0 \le \theta < 2\pi\text{ 、 }r = \text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta} \text{ 、 } 0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為1之圓）之積分，其變數轉換關係如下：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題，那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。作者擬以五個相關範例說明其應用，以下為第五個應用範例之說明。

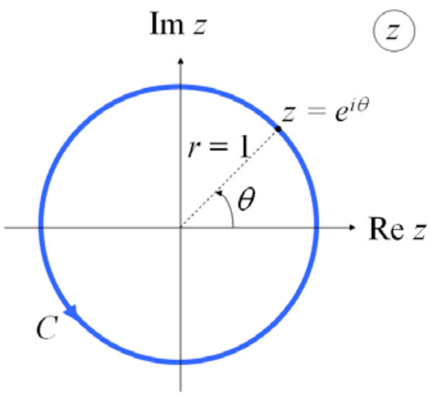
範例一
試求 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ 之積分值。

【解答】

由式(2)之說明知，可作 $z=e^{i\theta}$ 的變數變換，將對變數 θ 作 $[0,2\pi]$ 之線積分的問題改寫為對複數變數 z 作單位圓的線積分問題。但有一個比較麻煩的問題是：$\cos 3\theta$ 要如何表示成與 $z=e^{i\theta}$ 有關之關係式？因為 $\cos 3\theta=\frac{1}{2}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)$，且考慮 $z=e^{i\theta}$，所以 $\boxed{\cos 3\theta=\frac{1}{2}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right]=\frac{1}{2}\left[z^3+\left(\frac{1}{z}\right)^3\right]=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}$。基於此，原式可作如以下所示之改寫：

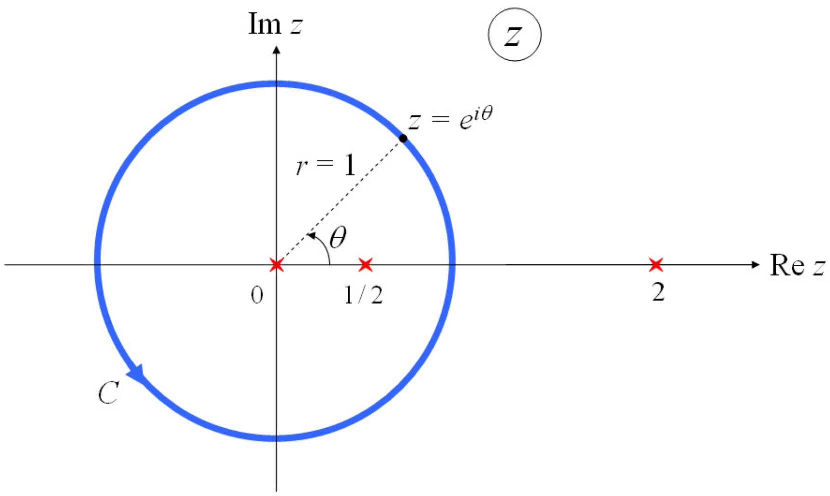
$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta &= \oint_C \frac{\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}{5-4\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{i}\oint_C \frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{\left[10-4\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]z}dz \\
&= \frac{i}{i^2}\oint_C \frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{\left(10-4z-\frac{4}{z}\right)z}dz \\
&= -i\oint_C \frac{z^6+1}{(10z^3-4z^4-4z^2)z}dz \\
&= -i\oint_C \frac{z^6+1}{2(-2z^2+5z-2)z^3}dz \\
&= \oint_C \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z-1)(z-2)}dz
\end{aligned} \tag{5}
$$

其中封閉積分路徑 C 是圓心在座標原點半徑為 1 之圓，稱為單位圓(Unit Circle)，如圖三所示。



圖三　圓心在座標原點半徑為 1 之單位圓

緊接著是要找出函數 $f(z)=\dfrac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}$ 落在封閉曲線 C 內之極點(Pole)。令函數 $f(z)$ 之分母為零，即可解出一元五次方程式 $2z^3(2z^2-5z+2)=0$ 之根，分別為 $z=2$、$1/2$、0，其中 $z=2$ 落在曲線 C 之外，但 $z=0$ 與 $z=1/2$ 卻落在曲線 C 之內部，需特別加以留意，如圖四所示：



圖四　$z=1/2$ 與 $z=0$ 落在 C 內

因 $z=1/2$ 與 $z=0$ 分別屬於函數 $f(z)$ 之單極點(Simple Pole)與三階極點(Pole of Order 3)，且都落在 C 之內部，故 $\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz$【附註一】，以下為問題之進一步解析過程。

方法一　利用廣義之 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{1}{n!}g^{(n)}(z_0)}$、

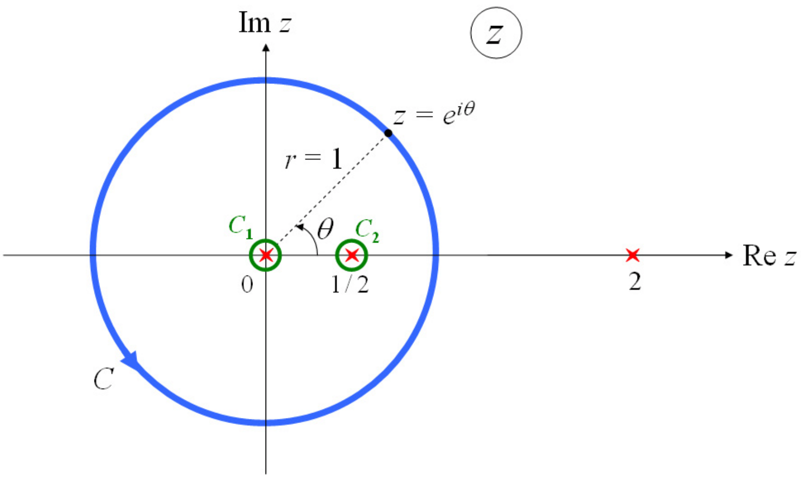
$\boxed{n=0,1,2,3,\cdots}$求解，條件為：$\boxed{❶\ g(z)\text{在}C\text{上及}C\text{內都是解析的；}❷\ z_0\text{為}C\text{內}}$

$\boxed{\text{之}n+1\text{階極點。}}$

由附註一知，式(5)可繼續化簡如下：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta &= \oint_C \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z-1)(z-2)}dz \\
&= \oint_{C_1}\frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z-1)(z-2)}dz + \oint_{C_2}\frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z-1)(z-2)}dz
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中C_1與C_2分別為圍繞$z=0$與$z=1/2$之封閉積分曲線，如圖五所示。



圖五　由對等路線積分及 Cauchy 積分定理等之概念知：

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

由 Cauchy 積分公式知：

$$\oint_{C_1} \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\dfrac{i(z^6+1)}{2(2z^2-5z+2)}}{z^3}dz$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{i(z^6+1)}{2(2z^2-5z+2)}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \pi i \frac{d}{dz}\left[\frac{6iz^5}{2(2z^2-5z+2)} - \frac{i(z^6+1)(4z-5)}{2(2z^2-5z+2)^2}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \pi i\left[\frac{30iz^4}{2(2z^2-5z+2)} - 2\times\frac{6iz^5(4z-5)}{2(2z^2-5z+2)^2} - \frac{i(z^6+1)(4)}{2(2z^2-5z+2)^2} + \frac{2i(z^6+1)(4z-5)^2}{2(2z^2-5z+2)^3}\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$= \pi i\left[0-2\times 0-\frac{i(0^6+1)(4)}{2(2\times 0^2-5\times 0+2)^2} + \frac{2i(0^6+1)(4\times 0-5)^2}{2(2\times 0^2-5\times 0+2)^3}\right]$$

$$= \pi i\left[-\frac{4i}{8}+\frac{50i}{16}\right]$$

$$= -\frac{21\pi}{8}$$

$$\oint_{C_2} \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz$$

$$= \oint_{C_2} \frac{i(z^6+1)}{4z^3(z-2)(z-1/2)}dz$$

$$= \oint_{C_2} \frac{\dfrac{i(z^6+1)}{4z^3(z-2)}}{z-1/2}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{i(z^6+1)}{4z^3(z-2)}\right]\Bigg|_{z=1/2}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{i(1/64+1)}{4\times(1/8)(-3/2)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{i(65/64)}{-3/4}\right]$$

$$= \frac{65}{24}\pi$$

故式(6)可表為：

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta = -\frac{21}{8}\pi+\frac{65}{24}\pi=\frac{\pi}{12}}$$

方法二　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $1/(z-z_0)$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

首先討論 $\oint_{C_1} \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz$ 之積分值。其中 $f(z)=\frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}$ 需以 0 為中心點作勞倫級數展開，故：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)} \\
&= \frac{i(z^6+1)}{4z^3(z-2)(z-1/2)} \\
&= \frac{i(z^6+1)}{4z^3} \times \frac{1}{(z-2)(z-1/2)} \\
&= \frac{i(z^6+1)}{4z^3}\left(\frac{2/3}{z-2} - \frac{2/3}{z-1/2}\right) \\
&= \frac{i(z^6+1)}{4z^3}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1/2}\right) \\
&= \frac{i(z^6+1)}{6z^3}\left(-\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1/2-z}\right) \\
&= \frac{i}{6}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-z/2} + 2\times\frac{1}{1-2z}\right) \\
&= \frac{i}{6}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\left\{-\frac{1}{2}\left[1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right] + 2\left[1+(2z)+(2z)^2+\cdots\right]\right\} \\
&= \frac{i}{6}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{4}z+\frac{63}{8}z^2+\cdots\right) \\
&= \frac{i}{4}\frac{1}{z^3} + \frac{5i}{8}\frac{1}{z^2} + \frac{21i}{16}\frac{1}{z} + \cdots
\end{aligned}
$$

由此可知 $a_{-1} = \frac{21i}{16}$，故：

$$
\oint_{C_1} \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i\left(\frac{21i}{16}\right) = -\frac{21}{8}\pi
$$

同理，$\oint_{C_2} \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz$ 中之 $f(z)=\frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}$ 需以 $1/2$ 為中心點作勞倫級數展開，亦即：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)} \\
&= \frac{i}{4(z-1/2)} \times \frac{z^6+1}{z^3(z-2)} \\
&= \frac{i}{4(z-1/2)}\left[\frac{z^6}{z^3(z-2)} + \frac{1}{z^3(z-2)}\right] \\
&= \frac{i}{4(z-1/2)}\left(\frac{z^3}{z-2} + \frac{-\frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}}{z^3} + \frac{\frac{1}{8}}{z-2}\right) \\
&= \frac{i}{4(z-1/2)}\left(\frac{z^3}{z-2} - \frac{1}{8}\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-2}\right)
\end{aligned}
$$

其中 $\frac{i}{4(z-1/2)}$ 已是以 $1/2$ 為中心點作級數展開之標準型態，可以不必再作任何化簡。另外，$\frac{z^3}{z-2} - \frac{1}{8}\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-2}$ 需以 $1/2$ 為中心點作勞倫級數展開，如以下所示：

$$
\begin{aligned}
&\frac{z^3}{z-2} - \frac{1}{8}\frac{1}{z} - \frac{1}{4}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{z-2} \\
&= \frac{[(z-0.5)+0.5]^3}{(z-0.5)-1.5} - \frac{1}{8}\frac{1}{(z-0.5)+0.5} - \frac{1}{4}\frac{1}{[(z-0.5)+0.5]^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{[(z-0.5)+0.5]^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{[(z-0.5)-1.5]} \\
&= -\frac{1}{1.5}\frac{[(z-0.5)+0.5]^3}{1-\frac{z-0.5}{1.5}} - \frac{1}{8}\times\frac{1}{0.5}\times\frac{1}{1-\frac{z-0.5}{-0.5}} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(0.5)^2}\times\frac{1}{(1-\frac{z-0.5}{-0.5})^2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\times\frac{1}{(0.5)^3}\times\frac{1}{(1-\frac{z-0.5}{-0.5})^3} - \frac{1}{8}\times\frac{1}{1.5}\times\frac{1}{1-\frac{z-0.5}{1.5}} \\
&= -\frac{1}{1.5}\left[(z-0.5)^3 + 3(z-0.5)^2(0.5) + 3(z-0.5)(0.5)^2 + (0.5)^3\right]\left[1 + \frac{z-0.5}{1.5} + \left(\frac{z-0.5}{1.5}\right)^2 + \cdots\right] \\
&\quad - \frac{1}{8}\times\frac{1}{0.5}\times\left[1 + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right) + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2 + \cdots\right] \\
&\quad - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(0.5)^2}\times\left[1 + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right) + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2 + \cdots\right]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\times\frac{1}{(0.5)^3}\times\left[1 + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right) + \left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2 + \cdots\right]^3 \\
&\quad - \frac{1}{8}\times\frac{1}{1.5}\times\left[1 + \frac{z-0.5}{1.5} + \left(\frac{z-0.5}{1.5}\right)^2 + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

故：

$$
\begin{aligned}
&f(z)\\
&=\frac{i}{4(z-1/2)}\left(\frac{z^3}{z-2}-\frac{1}{8}\frac{1}{z}-\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{8}\frac{1}{z-2}\right)\\
&=\frac{i}{4(z-1/2)}\\
&\times\Bigg\{-\frac{1}{1.5}\left[(z-0.5)^3+3(z-0.5)^2(0.5)+3(z-0.5)(0.5)^2+(0.5)^3\right]\left[1+\frac{z-0.5}{1.5}+\left(\frac{z-0.5}{1.5}\right)^2+\cdots\right]\\
&-\frac{1}{8}\times\frac{1}{0.5}\times\left[1+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2+\cdots\right]\\
&-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(0.5)^2}\times\left[1+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2+\cdots\right]^2\\
&-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(0.5)^3}\times\left[1+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)+\left(\frac{z-0.5}{-0.5}\right)^2+\cdots\right]^3\\
&-\frac{1}{8}\times\frac{1}{1.5}\times\left[1+\frac{z-0.5}{1.5}+\left(\frac{z-0.5}{1.5}\right)^2+\cdots\right]\Bigg\}
\end{aligned}
$$

其中之係數a_{-1}為：

$$
\begin{aligned}
a_{-1}&=\frac{i}{4}\times\left[\left(-\frac{1}{1.5}\right)\times(0.5)^3-\frac{1}{8}\times\frac{1}{0.5}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(0.5)^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(0.5)^3}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{1.5}\right]\\
&=\frac{i}{4}\times\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\times2-\frac{1}{4}\times4-\frac{1}{2}\times8-\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\right]\\
&=\frac{i}{4}\times\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}-1-4-\frac{1}{12}\right)\\
&=\frac{i}{4}\times\left(-\frac{65}{12}\right)\\
&=-\frac{65i}{48}
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\oint_{C_2}\frac{i(z^6+1)}{2z^3(2z^2-5z+2)}dz=2\pi i\left(-\frac{65}{48}i\right)=\frac{65}{24}\pi
$$

由此可知，式(6)可再次獲得相同答案：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=-\frac{21}{8}\pi+\frac{65}{24}\pi=\frac{1}{12}\pi}
$$

【附註一】

由 Cauchy 積分定理知，$\oint_C f(z)dz = 0$，其需滿足之條件為：$\boxed{f(z)\text{在}C\text{上及}C\text{內均是解析函數。}}$今再考慮如圖六所示之積分，其封閉積分曲線中包含$n$個不可解析點$z_1$、$z_2$、…、$z_n$。在圖七中，淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點，此一情況符合 Cauchy 積分定理之條件，故圖七所示之封閉曲線的線積分值可由 Cauchy 積分定理知：

$$\oint_{C\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_1\text{順}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{順}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{順}} f(z)dz$$
$$+ \int_{A_1}^{B_1} f(z)dz + \int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz + \int_{A_2}^{B_2} f(z)dz + \int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz + \cdots + \int_{A_n}^{B_n} f(z)dz + \int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz = 0 \tag{A1}$$

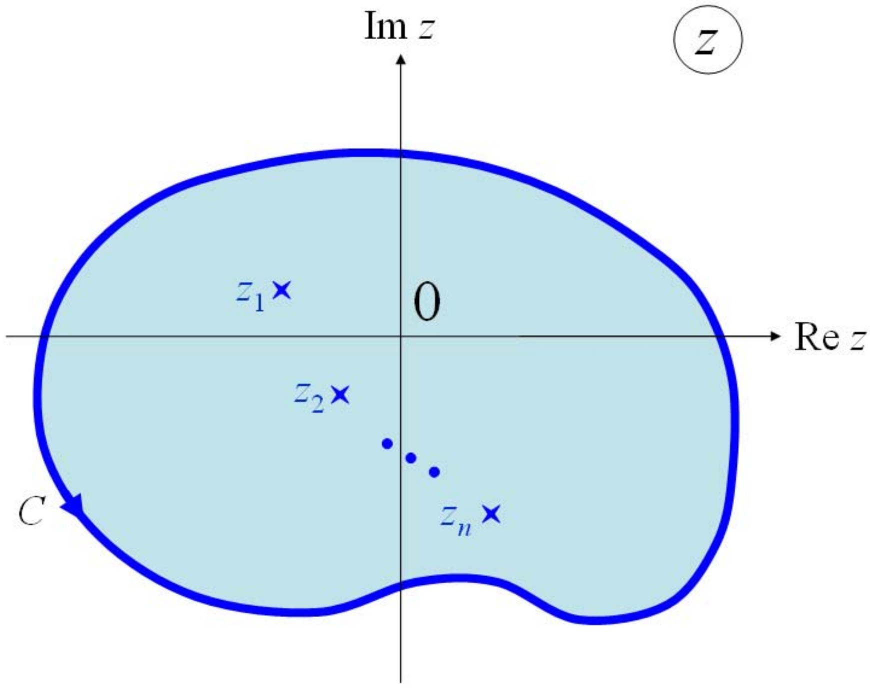
其中「順」表順鐘向作積分，「逆」表逆鐘向作積分；且$\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz + \int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz = 0$、$\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz + \int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz = 0$、…、$\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz + \int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz = 0$。故式(A1)可改寫為：

$$\oint_{C\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_1\text{順}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{順}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{順}} f(z)dz = 0 \tag{A2}$$

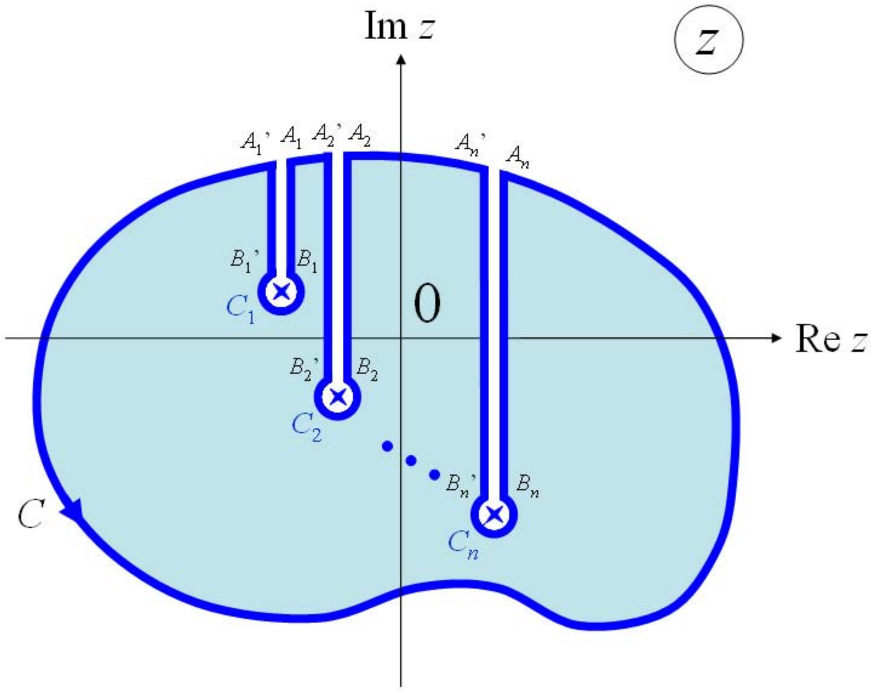
將上式中之「順鐘向積分」改寫為「逆鐘向積分」，則上式可進一步化簡為：

$$\boxed{\oint_{C\text{逆}} f(z)dz = \oint_{C_1\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{逆}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{逆}} f(z)dz} \tag{A3}$$

故得證。



圖六　包含 *n* 個不可解析點之封閉路線積分



圖七　上圖中淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點