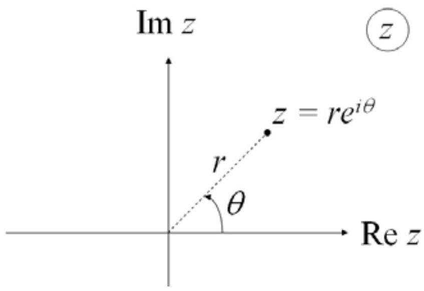
提要 375：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分問題(4)

第 1~2 頁的說明與前一單元相同。亦即有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

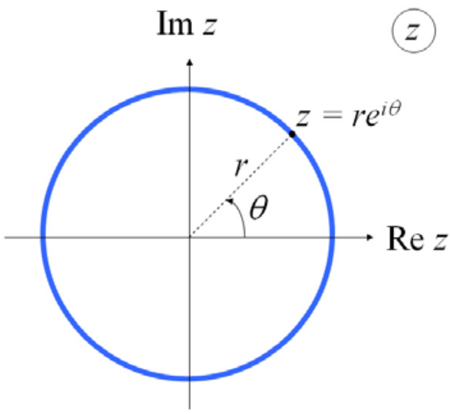
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$，其中 r 稱為大小(Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z = re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta}\text{、}0 \le \theta < 2\pi\text{、}r = \text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta}\text{ 、 }0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為 1 之圓）之積分，其變數轉換關係如下：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題，那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。作者擬以五個相關範例說明其應用，以下為第四個應用範例之說明。

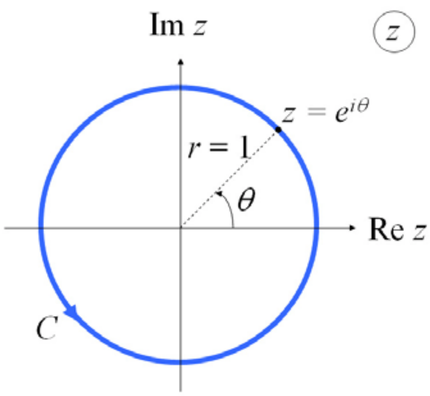
範例一
試證 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin\theta)^2} d\theta = \frac{5\pi}{32}$ 。

【證明】

由式(2)之說明知，可作 $z = e^{i\theta}$ 的變數變換，將對變數 θ 作 $[0,2\pi]$ 之線積分的問題改寫為對複數變數 z 作單位圓的線積分問題，亦即原式可作如以下所示之改寫：

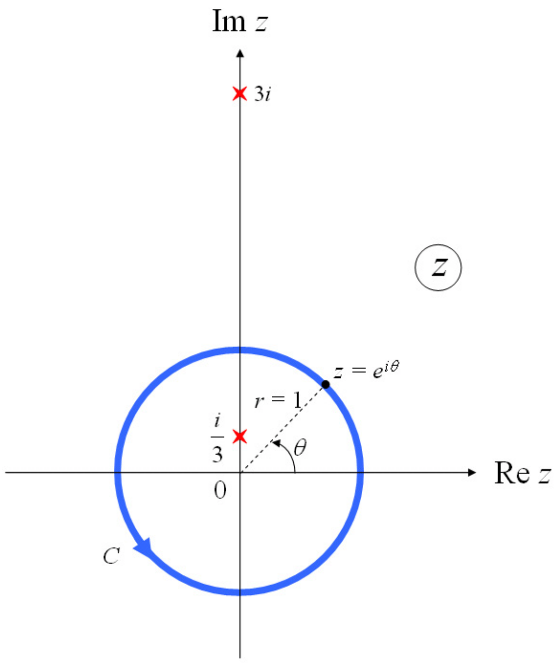
$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin\theta)^2} d\theta &= \oint_C \frac{1}{\left[5-\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{i}\oint_C \frac{z^2}{\left[5z-\frac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2} \frac{dz}{z} \\
&= -i\oint_C \frac{z}{\left[5z-\frac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2} dz
\end{aligned}
\tag{5}
$$

其中封閉積分路徑 C 是圓心在座標原點半徑為 1 之圓，稱為單位圓(Unit Circle)，如圖三所示。



圖三　圓心在座標原點半徑為 1 之單位圓

緊接著是要找出函數 $f(z)=\dfrac{-iz}{\left[5z-\dfrac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2}$ 落在封閉曲線 C 內之極點(Pole)。令函數 $f(z)$ 之分母為零，即可解出一元四次方程式 $\left[5z-\dfrac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2=0$ 之根，即 $z=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+4(3/2i)^2}}{2(-3/2i)}$，化簡後可得 $z=\dfrac{i}{3}$、$z=3i$，其中 $z=3i$ 落在曲線 C 之外，但 $z=\dfrac{i}{3}$ 卻落在曲線 C 之內部，如圖四所示：



圖四　$z=\dfrac{i}{3}$ 落在 C 內

圖四中 $z=\dfrac{i}{3}$ 係屬於函數 $f(z)$ 之二階極點（Pole of Order 2），且落在 C 之內部。

方法一　利用廣義之 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=2\pi i\dfrac{1}{n!}g^{(n)}(z_0)}$、$\boxed{n=0,1,2,3,\cdots}$ 求解，條件為：$\boxed{\text{❶ } g(z) \text{ 在 } C \text{ 上及 } C \text{ 內都是解析的；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之 } n+1 \text{ 階極點。}}$

茲引用廣義之 Cauchy 積分公式，則式(5)可繼續化簡如下：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin\theta)^2}d\theta &= -i\oint_C \frac{z}{\left[5z-\frac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2}dz \\
&= \oint_C \frac{-iz}{\left(-\frac{3}{2i}\right)^2\left[\left(z^2-1\right)-\frac{2i\times 5z}{3}\right]^2}dz \\
&= \oint_C \frac{-4}{9}\frac{-iz}{\left(z-\frac{i}{3}\right)^2(z-3i)^2}dz \\
&= \oint_C \frac{4iz/9(z-3i)^2}{\left(z-\frac{i}{3}\right)^2}dz \\
&= 2\pi i\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[\frac{4iz}{9(z-3i)^2}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= 2\pi i\left[\frac{4i}{9(z-3i)^2}-\frac{8iz}{9(z-3i)^3}\right]_{z=\frac{i}{3}} \\
&= 2\pi i\left[\frac{4i}{9\left(\frac{i}{3}-3i\right)^2}-\frac{8i\left(\frac{i}{3}\right)}{9\left(\frac{i}{3}-3i\right)^3}\right] \\
&= 2\pi i\left[\frac{4i}{9\left(-\frac{8i}{3}\right)^2}-\frac{8i\left(\frac{i}{3}\right)}{9\left(-\frac{8i}{3}\right)^3}\right] \\
&= 2\pi i\left[\frac{-i}{-\frac{64}{9}}+\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{512}{27}i}\right]\times\left(-\frac{4}{9}\right) \\
&= 2\pi i\left[\frac{9}{64}i+\frac{54}{1536}i\right]\times\left(-\frac{4}{9}\right) \\
&= 2\pi i\frac{9\times 24+54}{1536}i\times\left(-\frac{4}{9}\right) \\
&= 2\pi i\frac{270}{1536}i\times\left(-\frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{5}{32}\pi
\end{aligned}
$$

故得證。

方法二　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $1/(z-z_0)$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

積分函數 $f(z)=\dfrac{-iz}{\left[5z-\dfrac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2}$ 需以 $\dfrac{i}{3}$ 為中心點作勞倫級數展開，故：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{-iz}{\left[5z-\dfrac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2}\\
&=\frac{1}{\left(-\dfrac{3}{2i}\right)^2}\frac{-iz}{\left[\left(z^2-1\right)-\dfrac{2i}{3}(5z)\right]^2}\\
&=\frac{1}{\left(-\dfrac{9}{4}\right)}\frac{-iz}{\left[\left(z^2-1\right)-\dfrac{10i}{3}z\right]^2}\\
&=\frac{1}{\left(-\dfrac{9}{4}\right)}\frac{-iz}{\left(z-\dfrac{i}{3}\right)^2(z-3i)^2}\\
&=-\frac{4}{9}\frac{1}{\left(z-\dfrac{i}{3}\right)^2}\frac{-iz}{(z-3i)^2}\\
&=\frac{4}{9}\frac{1}{\left(z-\dfrac{i}{3}\right)^2}\frac{iz}{(z-3i)^2}
\end{aligned}
$$

其中 $\dfrac{4}{9}\dfrac{1}{\left(z-\dfrac{i}{3}\right)^2}$ 已是以 $\dfrac{i}{3}$ 作中心點之勞倫級數展開的一部分，故無需再作其他的化簡，僅需針對 $\dfrac{iz}{(z-3i)^2}$ 繼續加以討論。因為勞倫級數展開是以 $\dfrac{i}{3}$ 作中心點，所以 $\dfrac{iz}{(z-3i)^2}$ 需化簡如下：

$$\frac{iz}{(z-3i)^2}=\frac{i\left(z-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}\right)}{\left(z-\frac{i}{3}-3i+\frac{i}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{i\left(z-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}\right)}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2\left(1+\frac{z-\frac{i}{3}}{-3i+\frac{i}{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{i\left(z-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}\right)}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2\left[1-\frac{z-\frac{i}{3}}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]^2}$$

$$=\frac{i\left(z-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}\right)}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left\{1+\frac{z-\frac{i}{3}}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}+\left[\frac{z-\frac{i}{3}}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]^2+\cdots\right\}^2$$

$$=\frac{i\left(z-\frac{i}{3}+\frac{i}{3}\right)}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left\{1+\frac{2}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\left(z-\frac{i}{3}\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{i}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left\{\frac{i}{3}+\left[1+\frac{i}{3}\frac{2}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]\left(z-\frac{i}{3}\right)+\cdots\right\}$$

因此 $f(z)$之勞倫級數可改寫為：

$$f(z)=\frac{4}{9}\frac{1}{\left(z-\frac{i}{3}\right)^2}\frac{iz}{(z-3i)^2}$$

$$=\frac{4}{9}\frac{1}{\left(z-\frac{i}{3}\right)^2}\frac{i}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left\{\frac{i}{3}+\left[1+\frac{i}{3}\frac{2}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]\left(z-\frac{i}{3}\right)+\cdots\right\}$$

由此可知$a_{-1}=\frac{4}{9}\frac{i}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left[1+\frac{i}{3}\frac{2}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]$，此係數可繼續化簡為：

$$\begin{aligned}
a_{-1}&=\frac{4}{9}\frac{i}{\left(-3i+\frac{i}{3}\right)^2}\left[1+\frac{i}{3}\frac{2}{-\left(-3i+\frac{i}{3}\right)}\right]\\
&=\frac{4}{9}\frac{i}{-9+2-\frac{1}{9}}\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{2}{\frac{8}{3}}\right)\\
&=\frac{4}{9}\frac{i}{-\frac{64}{9}}\left(1+\frac{1}{4}\right)\\
&=\frac{4}{9}\left(-\frac{9i}{64}\right)\frac{5}{4}\\
&=-\frac{5i}{64}
\end{aligned}$$

故：

$$\boxed{\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin\theta)^2}\,d\theta&=-i\oint_C\frac{z}{\left[5z-\frac{3}{2i}\left(z^2-1\right)\right]^2}\,dz\\
&=2\pi i a_{-1}\\
&=2\pi i\left(-\frac{5i}{64}\right)\\
&=\frac{5\pi}{32}
\end{aligned}}$$

所以依此方式亦可證出相同結果。