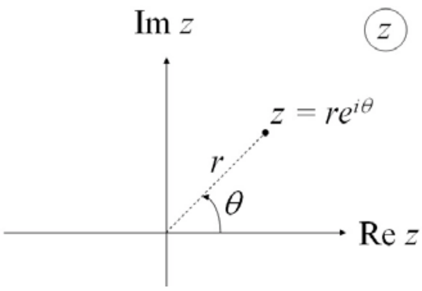
提要 374：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分問題(3)

第 1~2 頁的說明與前一單元相同。亦即有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

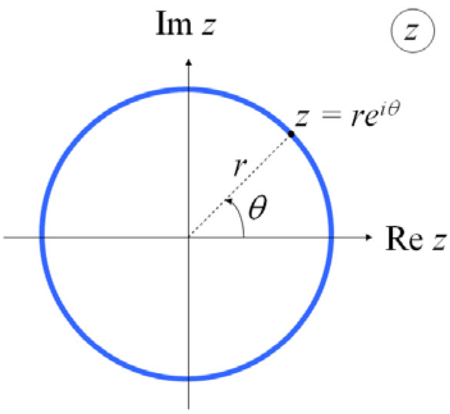
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$，其中 r 稱為大小 (Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z = re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta < 2\pi \text{ 、 } r = \text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta}\ 、\ 0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為 1 之圓）之積分，其變數轉換關係如下：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題,那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。作者擬以五個相關範例說明其應用，以下為第三個應用範例之說明。

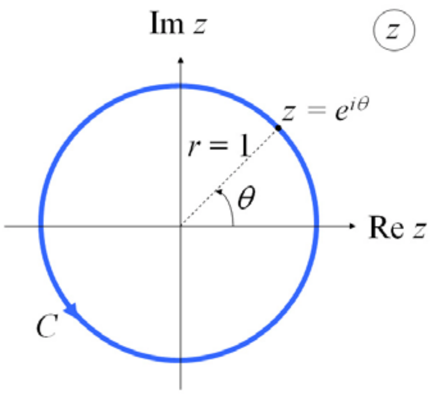
範例一
試求 $\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta$ 之積分值。

【解答】

由式(2)之說明知，可作 $z=e^{i\theta}$ 的變數變換，將對變數 θ 作 $[0,2\pi]$ 之線積分的問題改寫為對複數變數 z 作單位圓的線積分問題，亦即原式可作如以下所示之改寫：

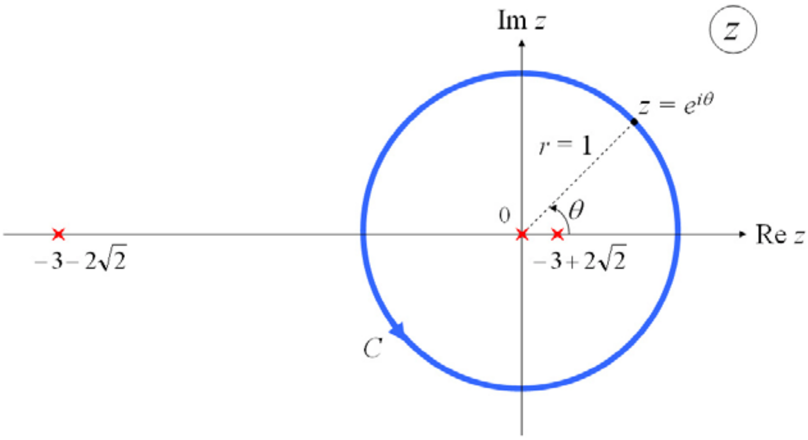
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta &= \oint_C \frac{1+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{i}\oint_C \frac{1+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{3z+\frac{1}{2}\left(z^2+1\right)}dz \\ &= \frac{1}{i^2}\oint_C \frac{2i+\left(z-\frac{1}{z}\right)}{6z+(z^2+1)}dz \\ &= -\oint_C \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz \end{aligned} \tag{5}$$

其中封閉積分路徑 C 是圓心在座標原點半徑為 1 之圓，稱為單位圓(Unit Circle)，如圖三所示。



圖三　圓心在座標原點半徑為 1 之單位圓

緊接著是要找出函數 $f(z)=-\dfrac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}$ 落在封閉曲線 C 內之極點(Pole)。令函數 $f(z)$ 之分母為零，即可解出一元三次方程式 $z(z^2+6z+1)=0$ 之根，分別為 $z=-3+2\sqrt{2}$ 、$-3-2\sqrt{2}$ 、0，其中 $z=-3-2\sqrt{2}$ 落在曲線 C 之外，但 $z=0$ 與 $z=-3+2\sqrt{2}$ 卻落在曲線 C 之內部，需特別加以留意，如圖四所示：



圖四　$z=-3+2\sqrt{2}$ 與 $z=0$ 落在 C 內

因 $z=-3+2\sqrt{2}$ 與 $z=0$ 均係屬於函數 $f(z)$ 之單極點(Simple Pole)，且都落在 C 之內部，故 $\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz$【附註一】，作者擬採用五種方法解析此一問題。

方法一　利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \dfrac{g(z)}{z-z_0}dz=2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：❶ $g(z)$ 在 C 上及 C 內都是解析的；❷ z_0 為 C 內之單極點。

由附註一知，式(5)可繼續化簡如下：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta &= -\oint_C \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz \\ &= -\oint_{C_1} \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz-\oint_{C_2} \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz\end{aligned} \tag{6}$$

其中C_1與C_2分別為圍繞$z=0$與$z=-3+2\sqrt{2}$之封閉積分曲線。由 Cauchy 積分公式知：

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_1}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -\oint_{C_1}\frac{\dfrac{z^2+2iz-1}{z^2+6z+1}}{z}dz \\
&= -2\pi i\left.\frac{z^2+2iz-1}{z^2+6z+1}\right|_{z=0} \\
&= -2\pi i\,\frac{0^2+2i(0)-1}{0^2+6(0)+1} \\
&= -2\pi i\,\frac{-1}{1} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -\oint_{C_2}\frac{\dfrac{z^2+2iz-1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})]}}{z-(-3+2\sqrt{2})}dz \\
&= -2\pi i\left.\frac{z^2+2iz-1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})]}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i\,\frac{(-3+2\sqrt{2})^2+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{(-3+2\sqrt{2})[(-3+2\sqrt{2})-(-3-2\sqrt{2})]} \\
&= -2\pi i\,\frac{(9-12\sqrt{2}+8)+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{(-3+2\sqrt{2})(4\sqrt{2})} \\
&= -2\pi i\,\frac{(16-12\sqrt{2})+2i(-3+2\sqrt{2})}{(-3+2\sqrt{2})(4\sqrt{2})} \\
&= 2\pi i\,\frac{(16-12\sqrt{2})+2i(-3+2\sqrt{2})}{12\sqrt{2}-16} \\
&= 2\pi i\,\frac{[(16-12\sqrt{2})+2i(-3+2\sqrt{2})](12\sqrt{2}+16)}{(12\sqrt{2}-16)(12\sqrt{2}+16)} \\
&= 2\pi i\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) \\
&= -2\pi i+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

故式(6)可表為：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta = 2\pi i+\left(-2\pi i+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}
$$

方法二　利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

$\boxed{❶\ p(z_0) \neq 0\text{；}❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，可知：

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_1} \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -2\pi i \left.\frac{z^2+2iz-1}{(z^3+6z^2+z)'}\right|_{z=0} \\
&= -2\pi i \left.\frac{z^2+2iz-1}{3z^2+12z+1}\right|_{z=0} \\
&= -2\pi i \frac{0^2+2i(0)-1}{3(0)^2+12(0)+1} \\
&= -2\pi i \frac{-1}{1} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_2} \frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -2\pi i \left.\frac{z^2+2iz-1}{(z^3+6z^2+z)'}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i \left.\frac{z^2+2iz-1}{3z^2+12z+1}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i \frac{(-3+2\sqrt{2})^2+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{3(-3+2\sqrt{2})^2+12(-3+2\sqrt{2})+1} \\
&= -2\pi i \frac{(9-12\sqrt{2}+8)+i(-6+4\sqrt{2})-1}{3(9-12\sqrt{2}+8)+12(-3+2\sqrt{2})+1} \\
&= -2\pi i \frac{(16-12\sqrt{2})+i(-6+4\sqrt{2})}{3(9-12\sqrt{2}+8)+(-36+24\sqrt{2})+1} \\
&= -2\pi i \frac{(16-12\sqrt{2})+i(-6+4\sqrt{2})}{16-12\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i \frac{[(16-12\sqrt{2})+i(-6+4\sqrt{2})](16+12\sqrt{2})}{(16-12\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})} \\
&= -2\pi i \frac{-32+i(-8\sqrt{2})}{-32} \\
&= -2\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

故亦可得出相同之結果，亦即式(6)可改寫為：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta = 2\pi i + \left(-2\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi}
$$

方法三　利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]}$ 求解，

條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，式(6)可繼續加以解析，步驟如以下所示：

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_1}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -2\pi i \lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}\right] \\
&= -2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{z^2+2iz-1}{z^2+6z+1} \\
&= -2\pi i \frac{0^2+2i(0)-1}{0^2+6(0)+1} \\
&= -2\pi i \frac{-1}{1} \\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -2\pi i \lim_{z\to -3+2\sqrt{2}}[z-(-3+2\sqrt{2})]\frac{z^2+2iz-1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})][z-(-3+2\sqrt{2})]} \\
&= -2\pi i \lim_{z\to -3+2\sqrt{2}}\frac{z^2+2iz-1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})]} \\
&= -2\pi i \frac{(-3+2\sqrt{2})^2+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{(-3+2\sqrt{2})[(-3+2\sqrt{2})-(-3-2\sqrt{2})]} \\
&= -2\pi i \frac{(9-12\sqrt{2}+8)+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{(-3+2\sqrt{2})(4\sqrt{2})} \\
&= -2\pi i \frac{(16-12\sqrt{2})+i(-6+4\sqrt{2})}{16-12\sqrt{2}} \\
&= -2\pi i \frac{[(16-12\sqrt{2})+i(-6+4\sqrt{2})](16+12\sqrt{2})}{(16-12\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})} \\
&= -2\pi i \frac{-32+i(-8\sqrt{2})}{-32} \\
&= -2\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

由此可知，式(6)化簡後仍可獲得相同答案：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta = 2\pi i + \left(-2\pi i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}
$$

方法四　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $1/(z-z_0)$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

首先討論 $-\oint_{C_1}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz$ 之積分值。其中 $f(z)=-\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}$ 需以 0 為中心點作勞倫級數展開，故：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=-\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}\\
&=-\frac{z^2+2iz-1}{z}\times\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})}\times\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})}\\
&=\left(\frac{1}{z}-2i-z\right)\times\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\times\frac{1}{1-\frac{z}{-3+2\sqrt{2}}}\times\frac{1}{-3-2\sqrt{2}}\times\frac{1}{1-\frac{z}{-3-2\sqrt{2}}}\\
&=\left(\frac{1}{z}-2i-z\right)\times\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{-3+2\sqrt{2}}+\cdots\right)\times\frac{1}{-3-2\sqrt{2}}\left(1+\frac{z}{-3-2\sqrt{2}}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{9-8}\left(\frac{1}{z}-2i-z\right)\left(1+\frac{z}{-3+2\sqrt{2}}+\cdots\right)\left(1+\frac{z}{-3-2\sqrt{2}}+\cdots\right)\\
&=\left(\frac{1}{z}-2i-z\right)\left(1+\frac{z}{-3+2\sqrt{2}}+\frac{z}{-3-2\sqrt{2}}+\cdots\right)\\
&=\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}+\frac{1}{-3-2\sqrt{2}}-2i\right)+\left(\frac{-2i}{-3+2\sqrt{2}}+\frac{-2i}{-3-2\sqrt{2}}-1\right)z+\cdots
\end{aligned}
$$

由此可知 $a_{-1}=1$，故：

$$
-\oint_{C_1}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i(1) = 2\pi i
$$

同理，$-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz$ 中之 $f(z)=-\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}$ 需以 $(-3+2\sqrt{2})$ 為中心點作勞倫級數展開，亦即：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=-\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}\\
&=-\frac{z^2+2iz-1}{z}\cdot\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})}\cdot\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})}
\end{aligned}
$$

其中$\dfrac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})}$已是以$\left(-3+2\sqrt{2}\right)$為中心點作級數展開之標準型態，可以不必再作任何化簡。另外，$\dfrac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})}$需以$\left(-3+2\sqrt{2}\right)$為中心點作勞倫級數展開，如以下所示：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})} &= \frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})+4\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{1-\dfrac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}}+\left[\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}}\right]^2+\cdots\right\}
\end{aligned}$$

而$\dfrac{z^2+2iz-1}{z}$亦需以$\left(-3+2\sqrt{2}\right)$為中心點作勞倫級數展開，說明如下：

$$\begin{aligned}
\frac{z^2+2iz-1}{z} &= z+2i-\frac{1}{z} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})\right]+(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})+(-3+2\sqrt{2})} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})\right]+(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\times\frac{1}{1-\dfrac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-(-3+2\sqrt{2})}} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})\right]+(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\left[1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-(-3+2\sqrt{2})}+\cdots\right]
\end{aligned}$$

故：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)} \\
&= -\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})} \\
&\quad \cdot\left\{\left[z-(-3+2\sqrt{2})\right]+(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\left[1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-(-3+2\sqrt{2})}+\cdots\right]\right\} \\
&\quad \cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}}+\left[\frac{z-(-3+2\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}}\right]^2+\cdots\right\} \\
&= \frac{-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\left[(-3+2\sqrt{2})+2i-\dfrac{1}{-3+2\sqrt{2}}\right]}{z-(-3+2\sqrt{2})} \\
&\quad -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{1+\frac{1}{-4\sqrt{2}}\left[(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\right]\right\}+\cdots
\end{aligned}
$$

其中之係數a_{-1}為：

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[(-3+2\sqrt{2})+2i-\frac{1}{-3+2\sqrt{2}}\right] \\
&= -\frac{(-3+2\sqrt{2})^2+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{(4\sqrt{2})(-3+2\sqrt{2})} \\
&= -\frac{(9-12\sqrt{2}+8)+2i(-3+2\sqrt{2})-1}{16-12\sqrt{2}} \\
&= -\frac{(16-12\sqrt{2})+2i(-3+2\sqrt{2})}{16-12\sqrt{2}} \\
&= -1-\frac{2i(-3+2\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})}{(16-12\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})} \\
&= -1-\frac{2i(-4\sqrt{2})}{-32} \\
&= -1-\frac{\sqrt{2}}{4}i
\end{aligned}
$$

因此：

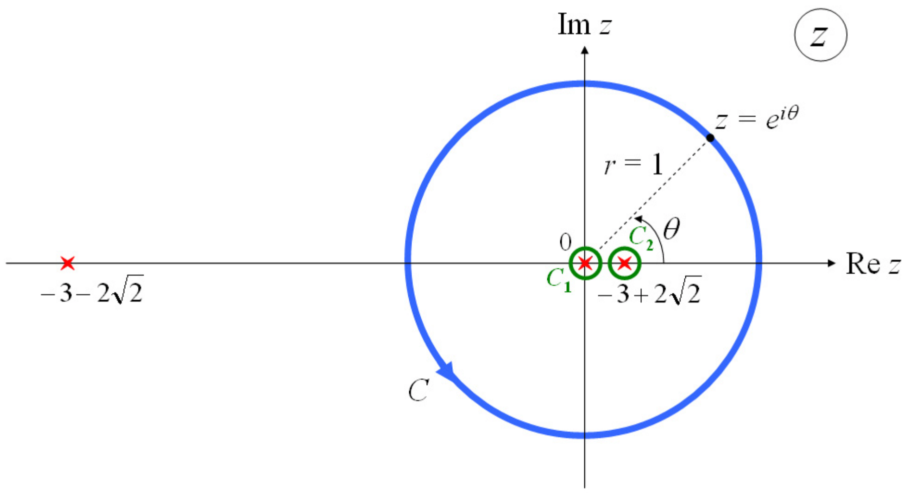
$$
-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz = 2\pi i\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = -2\pi i+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi
$$

由此可知，式(6)可再次獲得相同答案：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta = 2\pi i+\left(-2\pi i+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi}
$$

方法五　以對等路線積分的觀念，直接沿著積分曲線作線積分。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{為} C \text{內之單極點。}}$

由對等路線積分的概念知，圖五中沿著曲線C之線積分可改寫為沿著C_1與C_2之線積分的和，亦即$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$。



圖五　由對等路線積分及 Cauchy 積分定理等之概念知：

$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

❶ $\oint_{C_1} f(z)dz$ 之解析

設曲線C_1之半徑為ε_1，因曲線C_1是以座標原點為圓心，故曲線C_1可表為$z = \varepsilon_1 e^{i\theta}$、$0 \le \theta < 2\pi$、$\varepsilon_1 \to 0$。基於此，封閉路線積分$\oint_{C_1} f(z)dz$可改寫為：

$$
\begin{aligned}
-\oint_{C_1}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz &= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+2i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1}{\varepsilon_1 e^{i\theta}[(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6(\varepsilon_1 e^{i\theta})+1]}d(\varepsilon_1 e^{i\theta})\\
&= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+2i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1}{\varepsilon_1 e^{i\theta}[(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6(\varepsilon_1 e^{i\theta})+1]}(i\varepsilon_1 e^{i\theta}d\theta)\\
&= -\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+2i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1}{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6(\varepsilon_1 e^{i\theta})+1}(id\theta)\\
&= -\int_0^{2\pi}\frac{(0)^2+2i(0)-1}{[(0)^2+6(0)+1]}(id\theta)\\
&= -\int_0^{2\pi}(-1)(id\theta)\\
&= 2\pi i
\end{aligned}
$$

❷ $\oint_{C_2} f(z)dz$ 之解析

設曲線 C_2 之半徑為 ε_2 ，因曲線 C_2 是以 $\left(-3+2\sqrt{2}\right)$ 為圓心，故曲線 C_2 可表為 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)+\varepsilon_2 e^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon_2\to 0$。基於此，封閉路線積分 $\oint_{C_2} f(z)dz$ 可改寫為：

$$-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z(z^2+6z+1)}dz$$

$$=-\oint_{C_2}\frac{z^2+2iz-1}{z}\cdot\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})}\cdot\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})}dz$$

$$=-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+2i[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]-1\}\,d[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]}{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}][\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})]}$$

$$=-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+2i[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]-1\}\,(i\varepsilon_2 e^{i\theta}d\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}][\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})]}$$

$$=-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+2i[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}]-1\}\,(id\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})]}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{[(-3+2\sqrt{2})^2+2i(-3+2\sqrt{2})-1]\,(id\theta)}{(-3+2\sqrt{2})[(-3+2\sqrt{2})-(-3-2\sqrt{2})]}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{\{(9-12\sqrt{2}+8)+2i(-3+2\sqrt{2})-1\}\,(id\theta)}{(-3+2\sqrt{2})(4\sqrt{2})}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\frac{[(16-12\sqrt{2})+2i(-3+2\sqrt{2})](id\theta)}{16-12\sqrt{2}}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\left[1+\frac{2i(-3+2\sqrt{2})}{16-12\sqrt{2}}\right](id\theta)$$

$$=-i\left[1+\frac{2i(-3+2\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})}{(16-12\sqrt{2})(16+12\sqrt{2})}\right]\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=-2\pi i\left[1+\frac{2i(-4\sqrt{2})}{-32}\right]$$

$$=-2\pi i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)$$

由此可再次證明出相同的答案，亦即式(6)可表為：

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin\theta}{3+\cos\theta}d\theta=2\pi i-2\pi i\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}$$

又計算出相同的結果。

【附註一】

由 Cauchy 積分定理知，$\oint_C f(z)dz = 0$，其需滿足之條件為：$\boxed{f(z)\text{在}C\text{上及}C\text{內均是解析函數。}}$今再考慮如圖六所示之積分，其封閉積分曲線中包含$n$個不可解析點$z_1$、$z_2$、⋯、$z_n$。在圖七中，淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點，此一情況符合 Cauchy 積分定理之條件，故圖七所示之封閉曲線的線積分值可由 Cauchy 積分定理知：

$$\begin{aligned}&\oint_{C\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_1\text{順}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{順}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{順}} f(z)dz \\ &\quad + \int_{A_1}^{B_1} f(z)dz + \int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz + \int_{A_2}^{B_2} f(z)dz + \int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz + \cdots + \int_{A_n}^{B_n} f(z)dz + \int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz = 0\end{aligned} \tag{A1}$$

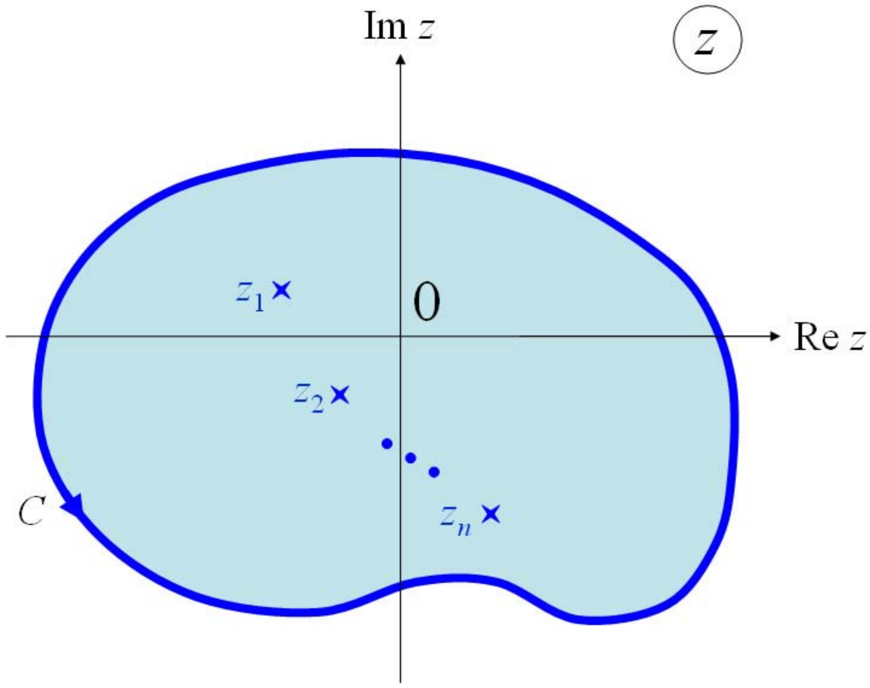
其中「順」表順鐘向作積分，「逆」表逆鐘向作積分；且$\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz + \int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz = 0$、$\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz + \int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz = 0$、⋯、$\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz + \int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz = 0$。故式(A1)可改寫為：

$$\oint_{C\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_1\text{順}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{順}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{順}} f(z)dz = 0 \tag{A2}$$

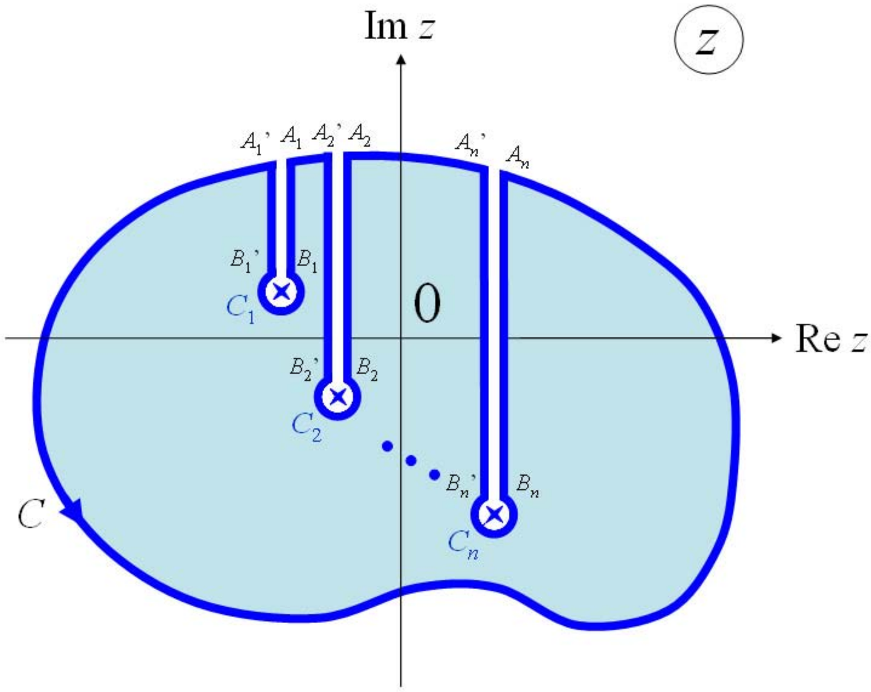
將上式中之「順鐘向積分」改寫為「逆鐘向積分」，則上式可進一步化簡為：

$$\boxed{\oint_{C\text{逆}} f(z)dz = \oint_{C_1\text{逆}} f(z)dz + \oint_{C_2\text{逆}} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n\text{逆}} f(z)dz} \tag{A3}$$

故得證。



圖六　包含n個不可解析點之封閉路線積分



圖七　上圖中淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點