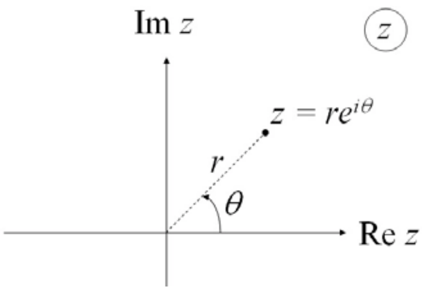
提要 373：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分問題(2)

第 1~2 頁的說明與前一單元相同。有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$ 、$\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

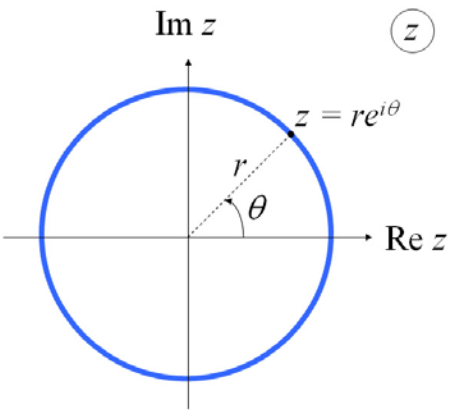
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$ ，其中 r 稱為大小(Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z = re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta < 2\pi \text{ 、 } r = \text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta} \text{ 、 } 0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為 1 之圓）之積分，其變數轉換關係如下：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題,那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。作者擬以五個相關範例說明其應用，以下為第二個應用範例之說明。

範例一

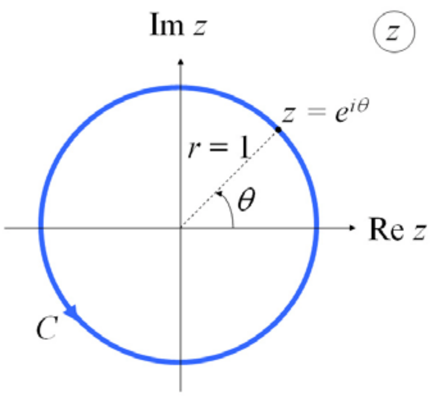
試求 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta} d\theta$ 之積分值。

【解答】

由式(2)之說明知，可作 $z=e^{i\theta}$ 的變數變換，將對變數 θ 作 $[0,2\pi]$ 之線積分的問題改寫為對複數變數 z 作單位圓的線積分問題，亦即原式可作如以下所示之改寫：

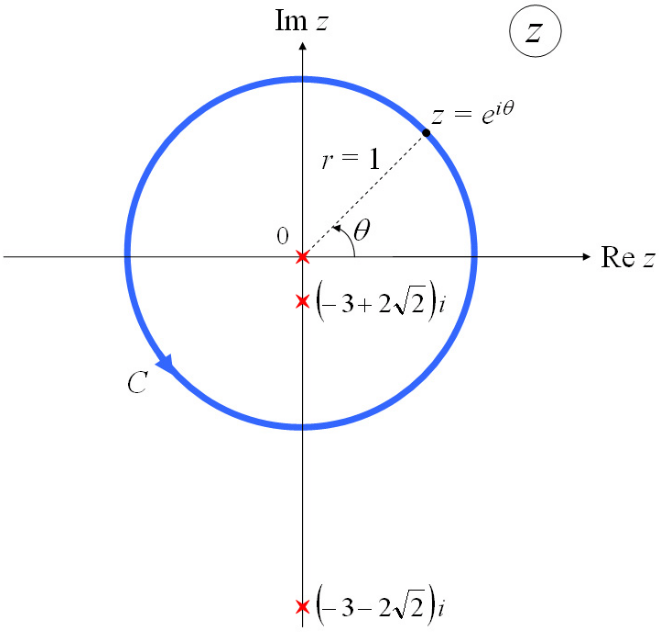
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta} d\theta = \oint_C \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)} dz \tag{5}$$

其中封閉積分路徑 C 是圓心在座標原點半徑為 1 之圓，如圖三所示。



圖三　圓心在座標原點半徑為 1 之單位圓

緊接著是要找出函數 $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}$ 落在封閉曲線 C 內之極點(Pole)。令函數 $f(z)$ 之分母為零，即可解出一元三次方程式 $z(z^2+6iz-1)=0$ 之根，分別為 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 、$\left(-3-2\sqrt{2}\right)i$ 、0，其中 $z=\left(-3-2\sqrt{2}\right)i$ 落在曲線 C 之外，但 $z=0$ 與 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 卻落在曲線 C 之內部，如圖四所示：



圖四　$z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 與 $z=0$ 落在 C 內

因 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 與 $z=0$ 均係屬於函數 $f(z)$ 之單極點(Simple Pole)，且都在 C 之內部，故 $\oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz$【附註一】，作者擬採用五種方法解析此一問題。

方法一　利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz=2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：❶ $g(z)$ 在 C 上及 C 內都是解析的；❷ z_0 為 C 內之單極點。

由附註一知，式(5)可繼續化簡如下：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta &= \oint_C \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz+\oint_{C_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz\end{aligned} \tag{6}$$

其中 C_1 與 C_2 分別為圍繞 $z=0$ 與 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 之封閉積分曲線。又由 Cauchy 積分公式知：

$$\oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{z^2+1}{z^2+6iz-1}}{z}dz$$

$$= 2\pi i \frac{z^2+1}{z^2+6iz-1}\bigg|_{z=0}$$

$$= 2\pi i \frac{0^2+1}{0^2+6i(0)-1}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{-1}$$

$$= -2\pi i$$

$$\oint_{C_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = \oint_{C_2} \frac{\dfrac{z^2+1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})i]}}{z-(-3+2\sqrt{2})i}dz$$

$$= 2\pi i \frac{z^2+1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})i]}\bigg|_{z=(-3+2\sqrt{2})i}$$

$$= 2\pi i \frac{[(-3+2\sqrt{2})i]^2+1}{[(-3+2\sqrt{2})i][(-3+2\sqrt{2})i-(-3-2\sqrt{2})i]}$$

$$= 2\pi i \frac{-(-3+2\sqrt{2})^2+1}{[(-3+2\sqrt{2})i](4\sqrt{2}i)}$$

$$= 2\pi i \frac{-(9-12\sqrt{2}+8)+1}{12\sqrt{2}-16}$$

$$= 2\pi i \frac{-16+12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16}$$

$$= 2\pi i$$

故式(6)可表為：

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta = -2\pi i + 2\pi i = 0}$$

方法二　利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\,\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

❶ $p(z_0)\neq 0$；❷ z_0 為 C 內之單極點。

基於此，可知：

$$\oint_{C_1}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = 2\pi i\left.\frac{z^2+1}{(z^3+6iz^2-z)'}\right|_{z=0}$$
$$= 2\pi i\left.\frac{z^2+1}{3z^2+12iz-1}\right|_{z=0}$$
$$= 2\pi i\,\frac{0^2+1}{3(0)^2+12i(0)-1}$$
$$= 2\pi i\,\frac{1}{-1}$$
$$= -2\pi i$$

$$\oint_{C_2}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = 2\pi i\left.\frac{z^2+1}{(z^3+6iz^2-z)'}\right|_{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}$$
$$= 2\pi i\left.\frac{z^2+1}{3z^2+12iz-1}\right|_{z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i}$$
$$= 2\pi i\,\frac{[(-3+2\sqrt{2})i]^2+1}{3[(-3+2\sqrt{2})i]^2+12i[(-3+2\sqrt{2})i]-1}$$
$$= 2\pi i\,\frac{-(-3+2\sqrt{2})^2+1}{3[-(-3+2\sqrt{2})^2]-12(-3+2\sqrt{2})-1}$$
$$= 2\pi i\,\frac{-(9-12\sqrt{2}+8)+1}{-3(9-12\sqrt{2}+8)+36-24\sqrt{2}-1}$$
$$= 2\pi i\,\frac{-16+12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16}$$
$$= 2\pi i$$

故亦可得出相同之結果，亦即式(6)可改寫為：

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta = -2\pi i + 2\pi i = 0}$$

方法三　利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，

條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，式(6)可繼續加以解析，步驟如以下所示：

$$\oint_{C_1}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = 2\pi i\lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}\right]$$
$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z^2+6iz-1}$$
$$= 2\pi i\frac{0^2+1}{(0)^2+6i(0)-1}$$
$$= 2\pi i\frac{1}{-1}$$
$$= -2\pi i$$

$$\oint_{C_2}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = 2\pi i\lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i}[z-(-3+2\sqrt{2})i]\frac{z^2+1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})i][z-(-3+2\sqrt{2})i]}$$
$$= 2\pi i\lim_{z\to(-3+2\sqrt{2})i}\frac{z^2+1}{z[z-(-3-2\sqrt{2})i]}$$
$$= 2\pi i\frac{[(-3+2\sqrt{2})i]^2+1}{[(-3+2\sqrt{2})i][(-3+2\sqrt{2})i-(-3-2\sqrt{2})i]}$$
$$= 2\pi i\frac{-(-3+2\sqrt{2})^2+1}{[(-3+2\sqrt{2})i](4\sqrt{2}i)}$$
$$= 2\pi i\frac{-(9-12\sqrt{2}+8)+1}{12\sqrt{2}-16}$$
$$= 2\pi i\frac{-16+12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16}$$
$$= 2\pi i$$

由此可知，式(6)化簡後仍可獲得相同答案：

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta = -2\pi i + 2\pi i = 0}$$

方法四　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $1/(z-z_0)$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

首先討論 $\oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz$ 之積分值。其中 $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}$ 需以 0 為中心點作勞倫級數展開，則：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)} \\
&= \frac{z^2+1}{z}\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i}\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} \\
&= \frac{z^2+1}{z}\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\frac{1}{1-\frac{z}{(-3+2\sqrt{2})i}}\frac{1}{(-3-2\sqrt{2})i}\frac{1}{1-\frac{z}{(-3-2\sqrt{2})i}} \\
&= \left(\frac{1}{z}+z\right)\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\left[1+\frac{z}{(-3+2\sqrt{2})i}+\cdots\right]\frac{1}{(-3-2\sqrt{2})i}\left[1+\frac{z}{(-3-2\sqrt{2})i}+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{(9-8)i^2}\left(\frac{1}{z}+z\right)\left[1+\frac{z}{(-3+2\sqrt{2})i}+\cdots\right]\left[1+\frac{z}{(-3-2\sqrt{2})i}+\cdots\right] \\
&= -\left(\frac{1}{z}+z\right)\left[1+\frac{z}{(-3+2\sqrt{2})i}+\cdots\right]\left[1+\frac{z}{(-3-2\sqrt{2})i}+\cdots\right] \\
&= -\left(\frac{1}{z}+z\right)\left[1+\frac{z}{(-3+2\sqrt{2})i}+\frac{z}{(-3-2\sqrt{2})i}+\cdots\right] \\
&= -\frac{1}{z}-\left[\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}+\frac{1}{(-3-2\sqrt{2})i}\right]-z-\left[\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}+\frac{1}{(-3-2\sqrt{2})i}\right]z^2-\cdots
\end{aligned}
$$

由此可知 $a_{-1}=-1$，故：

$$
\oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i(-1) = -2\pi i
$$

同理，$\oint_{C_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz$ 中之 $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}$ 需以 $(-3+2\sqrt{2})i$ 為中心點作勞

倫級數展開，亦即：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)} \\
&= \frac{z^2+1}{z}\cdot\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i}\cdot\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i}
\end{aligned}
$$

其中 $\dfrac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i}$ 已是以 $\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 為中心點作級數展開之標準型態，可以不必再作任何化簡。另外，$\dfrac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i}$ 需以 $\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 為中心點作級數展開，如以下所示：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i} &= \frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i+4\sqrt{2}i} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}i}\frac{1}{1-\dfrac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-4\sqrt{2}i}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}i}\left\{1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-4\sqrt{2}i}+\left[\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-4\sqrt{2}i}\right]^2+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

而 $\dfrac{z^2+1}{z}$ 亦需以 $\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 為中心點作勞倫級數展開，說明如下：

$$
\begin{aligned}
\frac{z^2+1}{z} &= z+\frac{1}{z} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})i\right]+(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i+(-3+2\sqrt{2})i} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})i\right]+(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\frac{1}{1-\dfrac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-(-3+2\sqrt{2})i}} \\
&= \left[z-(-3+2\sqrt{2})i\right]+(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\left[1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-(-3+2\sqrt{2})i}+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

故：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)} \\
&= \frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i} \\
&\quad \cdot \left\{ \left[z-(-3+2\sqrt{2})i\right] + (-3+2\sqrt{2})i + \frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\left[1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-(-3+2\sqrt{2})i}+\cdots\right]\right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i}\left\{1+\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-4\sqrt{2}i}+\left[\frac{z-(-3+2\sqrt{2})i}{-4\sqrt{2}i}\right]^2+\cdots\right\} \\
&= \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}i}\left[(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\right]}{z-(-3+2\sqrt{2})i} + \frac{1}{4\sqrt{2}i}\left\{1+\frac{1}{-4\sqrt{2}i}\left[(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\right]\right\}+\cdots
\end{aligned}
$$

其中之係數a_{-1}為：

$$
a_{-1} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}i}\left[(-3+2\sqrt{2})i+\frac{1}{(-3+2\sqrt{2})i}\right]}{z-(-3+2\sqrt{2})i} = 1
$$

因此：

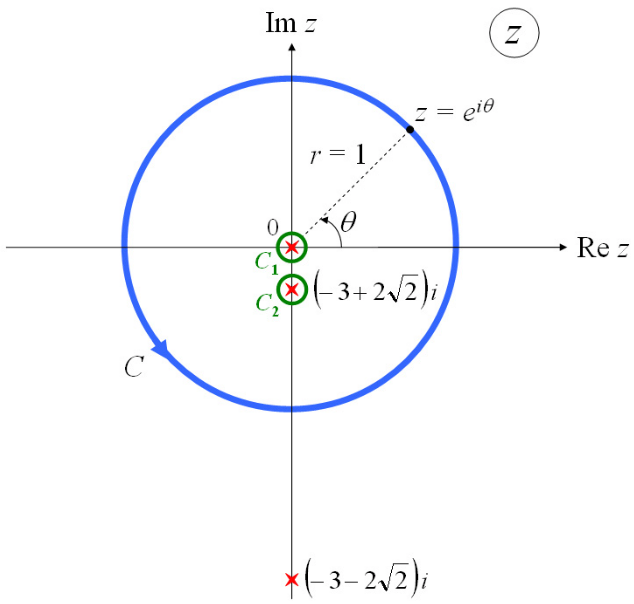
$$
\oint_{C_2} \frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}\,dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i(1) = 2\pi i
$$

由此可知，式(6)可再次獲得相同答案：

$$
\boxed{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}\,d\theta = -2\pi i + 2\pi i = 0}
$$

方法五　以對等路線積分的觀念，直接沿著積分曲線作線積分。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

由對等路線積分的概念知，圖五中沿著曲線C之線積分可改寫為沿著C_1與C_2之線積分的和，亦即$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$。



圖五　由對等路線積分及 Cauchy 積分定理等之概念知：

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

❶ $\oint_{C_1} f(z)dz$ 之解析

設曲線C_1之半徑為ε_1，因曲線C_1是以座標原點為圓心，故曲線C_1可表為$z=\varepsilon_1 e^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon_1\to 0$。基於此，封閉路線積分$\oint_{C_1} f(z)dz$可改寫為：

$$\oint_{C_1}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+1}{\varepsilon_1 e^{i\theta}[(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1]}d(\varepsilon_1 e^{i\theta})$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+1}{\varepsilon_1 e^{i\theta}[(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1]}(i\varepsilon_1 e^{i\theta}d\theta)$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+1}{[(\varepsilon_1 e^{i\theta})^2+6i(\varepsilon_1 e^{i\theta})-1]}(id\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(0)^2+1}{[(0)^2+6i(0)-1]}(id\theta)$$

$$=\int_0^{2\pi}(-1)(id\theta)$$

$$=-2\pi i$$

❷ $\oint_{C_2} f(z)dz$ 之解析

設曲線 C_2 之半徑為 ε_2 ，因曲線 C_2 是以 $\left(-3+2\sqrt{2}\right)i$ 為圓心，故曲線 C_2 可表為 $z=\left(-3+2\sqrt{2}\right)i+\varepsilon_2 e^{i\theta}$ 、 $0\le\theta<2\pi$ 、 $\varepsilon_2\to 0$ 。基於此，封閉路線積分 $\oint_{C_2} f(z)dz$ 可改寫為：

$$\oint_{C_2}\frac{z^2+1}{z(z^2+6iz-1)}dz=\oint_{C_2}\frac{z^2+1}{z}\cdot\frac{1}{z-(-3+2\sqrt{2})i}\cdot\frac{1}{z-(-3-2\sqrt{2})i}dz$$

$$=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+1\}\,d[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}]}{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}][\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})i]}$$

$$=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+1\}\,(i\varepsilon_2 e^{i\theta}d\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}][\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})i]}$$

$$=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}]^2+1\}\,(id\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}][(-3+2\sqrt{2})i+\varepsilon_2 e^{i\theta}-(-3-2\sqrt{2})i]}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\{[(-3+2\sqrt{2})i]^2+1\}\,(id\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})i][(-3+2\sqrt{2})i-(-3-2\sqrt{2})i]}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\{-(9-12\sqrt{2}+8)+1\}\,(id\theta)}{[(-3+2\sqrt{2})i][4\sqrt{2}i]}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(-16+12\sqrt{2})(id\theta)}{-16+12\sqrt{2}}$$

$$=2\pi i$$

由此可再次證明出相同的答案，亦即式(6)可表為：

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}d\theta=-2\pi i+2\pi i=0}$$

又計算出相同的結果。

【附註一】

由 Cauchy 積分定理知，$\oint_C f(z)dz=0$，其需滿足之條件為：$\boxed{f(z)\text{在}C\text{上及}C\text{內均是解析函數。}}$今再考慮如圖六所示之積分，其封閉積分曲線中包含$n$個不可解析點$z_1$、$z_2$、…、$z_n$。在圖七中，淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點，此一情況符合 Cauchy 積分定理之條件，故圖七所示之封閉曲線的線積分值可由 Cauchy 積分定理知：

$$\begin{aligned}&\oint_{C\text{逆}} f(z)dz+\oint_{C_1\text{順}} f(z)dz+\oint_{C_2\text{順}} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n\text{順}} f(z)dz\\&\quad+\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz+\int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz+\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz+\int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz+\cdots+\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz+\int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz=0\end{aligned}\qquad\text{(A1)}$$

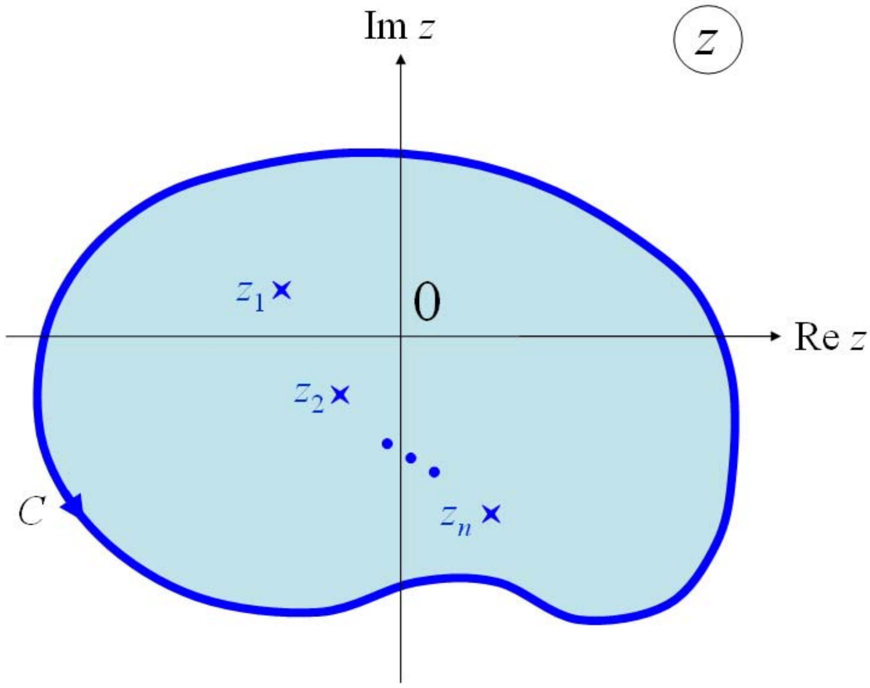
其中「順」表順鐘向作積分，「逆」表逆鐘向作積分；且$\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz+\int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz=0$、$\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz+\int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz=0$、…、$\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz+\int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz=0$。故式(A1)可改寫為：

$$\oint_{C\text{逆}} f(z)dz+\oint_{C_1\text{順}} f(z)dz+\oint_{C_2\text{順}} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n\text{順}} f(z)dz=0\qquad\text{(A2)}$$

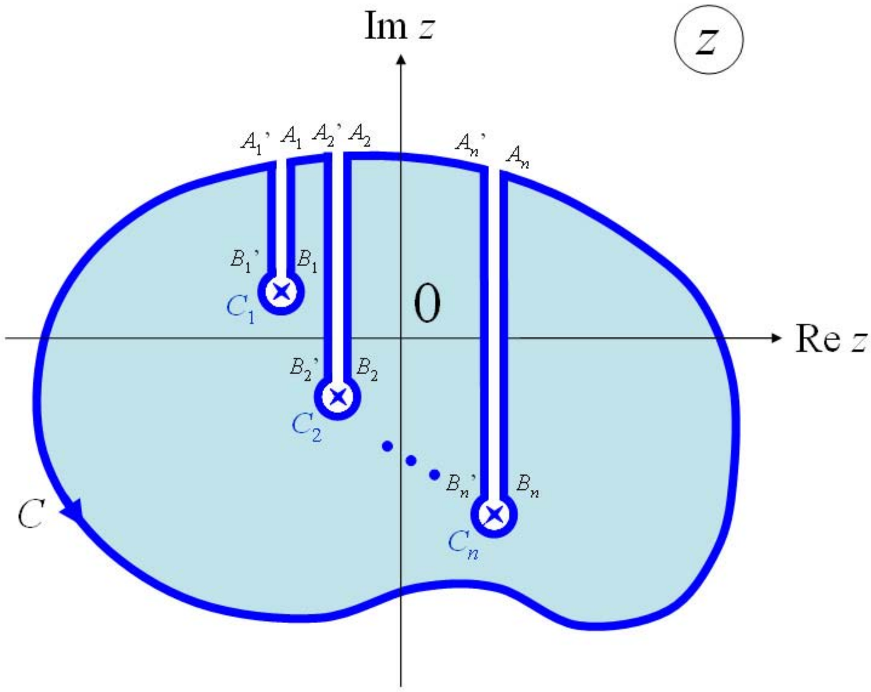
將上式中之「順鐘向積分」改寫為「逆鐘向積分」，則上式可進一步化簡為：

$$\boxed{\oint_{C\text{逆}} f(z)dz=\oint_{C_1\text{逆}} f(z)dz+\oint_{C_2\text{逆}} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n\text{逆}} f(z)dz}\qquad\text{(A3)}$$

故得證。



圖六　包含 *n* 個不可解析點之封閉路線積分



圖七　上圖中淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點