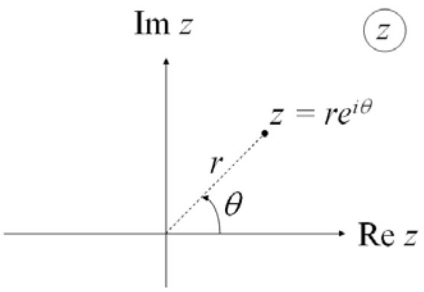
提要 372：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分問題(1)

有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

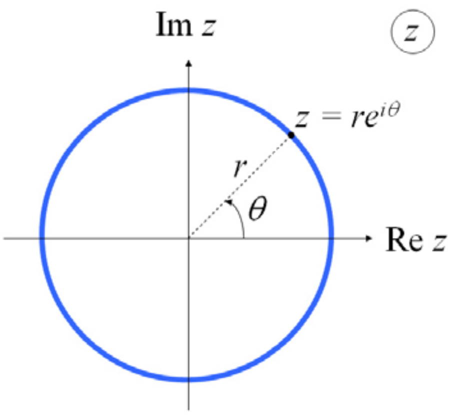
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$ ，其中 r 稱為大小(Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z = re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z = re^{i\theta} \text{ 、 } 0 \le \theta < 2\pi \text{ 、 } r = \text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta}\text{ 、 }0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為 1 之圓）之積分，其變數轉換關係如下【附註一】:

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題，那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。作者擬以五個相關範例說明其應用，以下為第一個應用範例之說明。

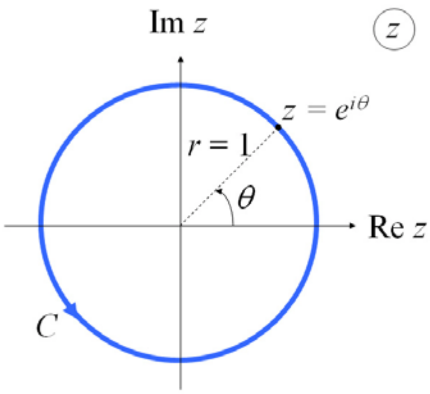
範例一
試證 $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}=2\pi$ 。

【證明】

由式(2)之說明知，可作 $z=e^{i\theta}$ 的變數變換，將對變數 θ 作 $[0,2\pi]$ 之線積分的問題改寫為對複數變數 z 作單位圓的線積分問題，亦即原式可作如以下所示之改寫：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}&=\oint_C\frac{dz/iz}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\\&=\frac{1}{i}\oint_C\frac{dz}{\sqrt{2}z-\frac{1}{2}\left(z^2+1\right)}\\&=-\frac{2}{i}\oint_C\frac{dz}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\end{aligned}\qquad(5)$$

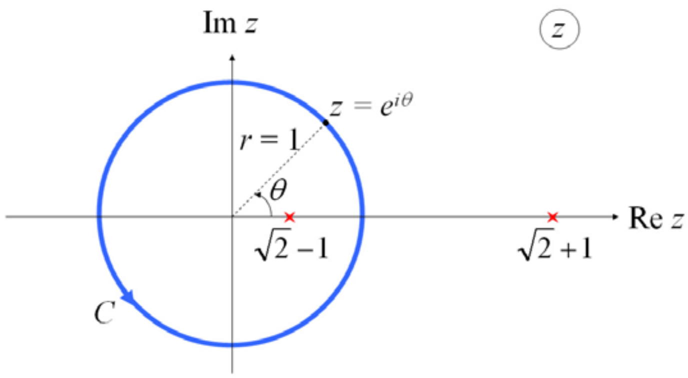
其中封閉積分路徑 C 是圓心在座標原點半徑為 1 之圓，如圖三所示。



圖三　圓心在座標原點半徑為 1 之單位圓

緊接著是要找出函數 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$ 落在封閉曲線 C 內之極點(Pole)。令函數 $f(z)$ 之分母為零，即可解出一元二次方程式 $z^2-2\sqrt{2}z+1=0$ 之根，分別為 $z=\sqrt{2}+1$ 、

$\sqrt{2}-1$，其中 $z=\sqrt{2}+1$ 落在曲線 C 之外，但 $z=\sqrt{2}-1$ 卻落在曲線 C 之內部，如圖四所示：



圖四　$z=\sqrt{2}-1$ 落在 C 內

因 $z=\sqrt{2}-1$ 屬於函數 $f(z)$ 之單極點(Simple Pole)，因此之前所學過的五種方法都可用以解析此一問題。

方法一　利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：❶ $g(z)$ 在 C 上及 C 內都是解析的；❷ z_0 為 C 內之單極點。

基於此，式(5)可繼續化簡如下：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} &= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{\frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)}}{z-(\sqrt{2}-1)}dz \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \left.\frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)}\right|_{z=\sqrt{2}-1} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{-2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

故得證。

方法二　利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

$\boxed{\text{❶ } p(z_0)\neq 0\text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，可將式(5)中之分子、分母分別視為 $p(z)=1$、$q(z)=z^2-2\sqrt{2}z+1$，再繼續如以下所示之解析：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} &= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \left.\frac{1}{\left(z^2-2\sqrt{2}z+1\right)'}\right|_{z=\sqrt{2}-1} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \left.\frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\right|_{z=\sqrt{2}-1} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)-2\sqrt{2}} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{-2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

故亦可證出相同結果。

方法三　利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]}$ 求解，

條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，式(5)可繼續加以解析，步驟如以下所示：

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} &= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \lim_{z\to\sqrt{2}-1}\left\{\left[z-\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\right\} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \lim_{z\to\sqrt{2}-1}\left\{\frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)}\right\} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)} \\
&= -\frac{2}{i}\times 2\pi i\times \frac{1}{-2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

太好了，又找到相同的答案了！

方法四　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $1/(z-z_0)$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

茲以 $\sqrt{2}-1$ 為中心點作勞倫級數展開，則：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1} \\
&= \frac{1}{[z-(\sqrt{2}-1)][z-(\sqrt{2}+1)]} \\
&= \frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{1}{z-(\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{1}{[z-(\sqrt{2}-1)]-2} \\
&= \frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{[z-(\sqrt{2}-1)]}{2}} \\
&= \frac{1}{z-(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{-1}{2}\left\{1+\frac{z-(\sqrt{2}-1)}{2}+\left[\frac{z-(\sqrt{2}-1)}{2}\right]^2+\left[\frac{z-(\sqrt{2}-1)}{2}\right]^3+\cdots\right\} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{z-(\sqrt{2}-1)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left[z-(\sqrt{2}-1)\right] - \frac{1}{16}\left[z-(\sqrt{2}-1)\right]^2 - \cdots
\end{aligned}
$$

由此可知 $a_{-1} = -\frac{1}{2}$，故式(5)可繼續加以化簡：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} &= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz \\
&= -\frac{2}{i} \times 2\pi i \times a_{-1} \\
&= -\frac{2}{i} \times 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

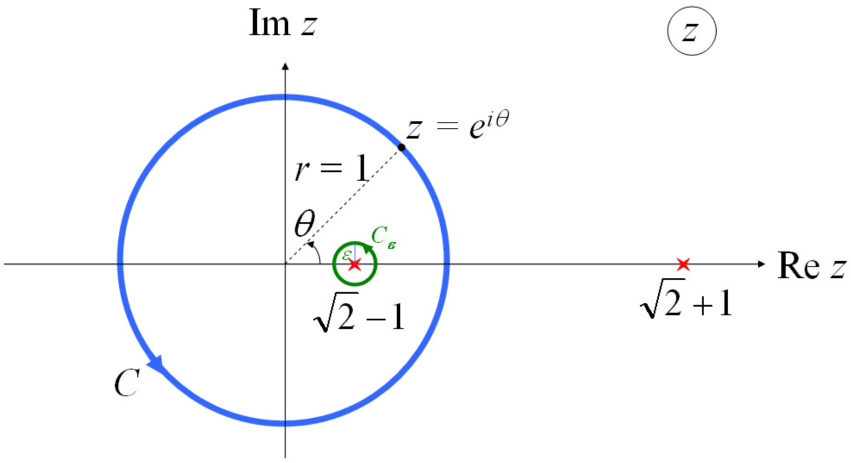
很幸運的，亦可計算出相同結果。

方法五　以對等路線積分的觀念，直接沿著積分曲線作線積分。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0}$ $\boxed{\text{為}C\text{內之單極點。}}$

由對等路線積分的概念知，圖五中沿著曲線C之線積分可改寫為沿著C_ε之線積分，而曲線C_ε可表為$z-\left(\sqrt{2}-1\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$。故式(5)可改寫為：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta}&=-\frac{2}{i}\oint_C\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz\\
&=-\frac{2}{i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}dz\\
&=-\frac{2}{i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{[z-(\sqrt{2}-1)][z-(\sqrt{2}+1)]}dz\\
&=-\frac{2}{i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{[\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}][(\sqrt{2}-1+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta})-(\sqrt{2}+1)]}d\left(\sqrt{2}-1+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}\right)\\
&=-\frac{2}{i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta})(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}-2)}\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right)\\
&=-\frac{2}{i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta})(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}-2)}i\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta\\
&=-\frac{2}{i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}-2}id\theta\\
&=-\frac{2}{i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{0-2}id\theta\\
&=-\frac{2}{i}\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)\int_0^{2\pi}d\theta\\
&=-\frac{2}{i}\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)(2\pi)\\
&=2\pi
\end{aligned}
$$

又計算出相同的結果，故得證。



圖五　由對等路線積分之概念知：$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_\varepsilon} f(z)dz$ 。

【附註一】

由尤拉公式(Euler Formula)知，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 、$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ ，故式(3)中之第一式與第二式即可得出。比較難以理解的是式(3)中之第三式 $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ ，其原因說明如下。因為考慮 $z = e^{i\theta}$，所以 $dz = de^{i\theta} = \dfrac{de^{i\theta}}{d(i\theta)}\dfrac{d(i\theta)}{d\theta}d\theta = e^{i\theta}(i)d\theta = (z)(i)d\theta$，故 $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ 。