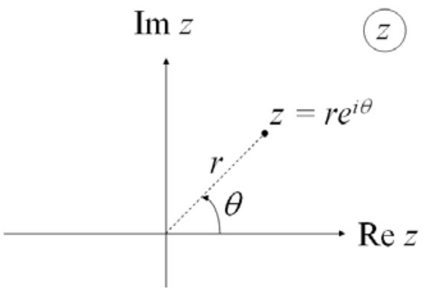
提要 371：以複變分析解析三角函數由 0 至 2π 的線積分

有一類的線積分問題與三角函數 $\sin\theta$ 、 $\cos\theta$ 有關，其積分型態如以下所示：

$$I=\int_0^{2\pi}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \tag{1}$$

這一類問題若欲直接對變數 θ 作積分，通常會遭遇很多困難。但若將其轉換為與複數變數 z 有關之線積分，則容易許多，說明如下。

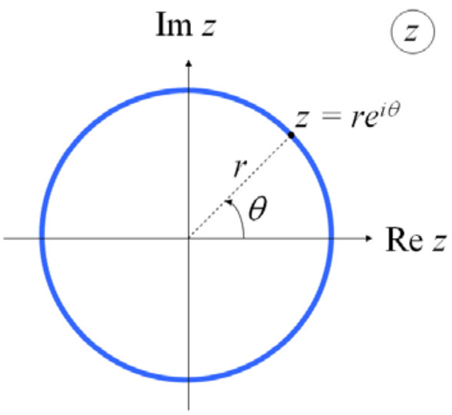
已知在如圖一所示複數平面上之任意點均可表為 z 或 $re^{i\theta}$ ，其中 r 稱為大小(Magnitude)，θ 稱為幅角(Argument)：



圖一　複數平面上任意點之表達方式

只要將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化，即可形成如圖二所示之圓。亦即 $z=re^{i\theta}$ 僅表示一個點，但式(2)表示一個圓心在座標原點半徑為 r 的圓：

$$\boxed{z=re^{i\theta}\text{ 、 }0\le\theta<2\pi\text{ 、 }r=\text{定值}} \tag{2}$$



圖二　將圖一中之角度變數 θ 作 0 至 2π 的角度變化所形成的圓

若考慮式(2)中之$r=1$，即令：

$$z=e^{i\theta}\text{ 、 }0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

則式(1)中與變數θ有關之積分可改寫為對變數z作單位圓（Unit Circle，圓心在座標原點半徑為 1 之圓）之積分，其變數轉換關係如下【附註一】：

$$\boxed{\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\\ d\theta=\dfrac{dz}{iz}\end{cases}} \tag{3}$$

基於此，式(1)可改寫為：

$$I=\oint_C F\left(\frac{z+(1/z)}{2},\frac{z-(1/z)}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \tag{4}$$

現在所面對的問題又是一個與複變函數$f(z)$之封閉曲線C的線積分有關之問題，那以前所學過的各種解析方法都可再加以應用。關於以上觀念之應用範例，請參考接續之五個提要的範例說明。

【附註一】

由尤拉公式(Euler Formula)知，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 、 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$ ，故式(3)中之第一式與第二式即可得出。比較難以理解的是式(3)中之第三式$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$，其原因說明如下。因為考慮$z=e^{i\theta}$，所以$dz=de^{i\theta}=\dfrac{de^{i\theta}}{d(i\theta)}\dfrac{d(i\theta)}{d\theta}d\theta=e^{i\theta}(i)d\theta=(z)(i)d\theta$，故$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ 。