提要 370：殘值定理(Residue Theorem)的應用(8)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第八個應用範例。

範例一
已知 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$ ，試求函數 $f(z)$於所有極點之殘值 $\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$ 。

【解答】

只要考慮函數 $f(z)$之分母為零，即$(z^2+\pi^2)^2=0$，則本題所示之函數 $f(z)$的兩個極點即可求出：

$$z=-\pi i \text{ 、 } z=\pi i$$

其中 $z=-\pi i$ 與 $z=\pi i$ 均為二階之極點。本題擬採用以下所示二階極點的計算公式推求問題之解。

■ 考慮 $z=z_0$ 為二階極點時：

利用二階極點之殘值計算公式 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$

❶ $\operatorname*{Res}_{z=\pi i}\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=\pi i}\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} &= \lim_{z\to\pi i}\frac{d}{dz}\left\{(z-\pi i)^2\frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to\pi i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z+\pi i)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to\pi i}\left\{\frac{e^z}{(z+\pi i)^2}-\frac{2e^z}{(z+\pi i)^3}\right\}\\
&= \frac{e^{\pi i}}{(\pi i+\pi i)^2}-\frac{2e^{\pi i}}{(\pi i+\pi i)^3}\\
&= \frac{\cos\pi+i\sin\pi}{(2\pi i)^2}-\frac{2(\cos\pi+i\sin\pi)}{(2\pi i)^3}\\
&= \frac{-1}{-4\pi^2}-\frac{-2}{-8\pi^3 i}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}-\frac{(i)}{4\pi^3 i(i)}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}+\frac{i}{4\pi^3}\\
&= \frac{\pi+i}{4\pi^3}
\end{aligned}
$$

❷ $\operatorname*{Res}_{z=-\pi i}\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-\pi i}\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} &= \lim_{z\to-\pi i}\frac{d}{dz}\left\{(z+\pi i)^2\frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to-\pi i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}\right\}\\
&= \lim_{z\to-\pi i}\left\{\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}-\frac{2e^z}{(z-\pi i)^3}\right\}\\
&= \frac{e^{-\pi i}}{(-\pi i-\pi i)^2}-\frac{2e^{-\pi i}}{(-\pi i-\pi i)^3}\\
&= \frac{\cos\pi-i\sin\pi}{(-2\pi i)^2}-\frac{2(\cos\pi-i\sin\pi)}{(-2\pi i)^3}\\
&= \frac{-1}{-4\pi^2}-\frac{-2}{8\pi^3 i}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}+\frac{(i)}{4\pi^3 i(i)}\\
&= \frac{1}{4\pi^2}-\frac{i}{4\pi^3}\\
&= \frac{\pi-i}{4\pi^3}
\end{aligned}
$$