提要 369：殘值定理(Residue Theorem)的應用(7)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第七個應用範例。

範例一
已知 $f(z)=\dfrac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}$，試求函數 $f(z)$於所有極點之殘值 $\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$。

【解答】

只要考慮函數 $f(z)$之分母為零，即 $z^2(z^2+2z+2)=0$，則本題所示之函數 $f(z)$的三個極點即可求出：

$$z=-1+i \text{ 、 } z=-1-i \text{ 、 } z=0$$

其中 $z=0$ 為二階之極點，$z=-1+i$ 與 $z=-1-i$ 為單極點。本題擬採用以下所示單極點及二階極點的計算公式推求問題之解。

■ 考慮 $z=z_0$ 為單極點時：

利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

■ 考慮 $z=z_0$ 為二階極點時：

利用二階極點之殘值計算公式 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$

❶ $\operatorname*{Res}_{z=0}\dfrac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)} &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left\{z^2\frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^{tz}}{z^2+2z+2}\right\}\\
&= \lim_{z\to 0}\left\{\frac{te^{tz}}{z^2+2z+2}-\frac{e^{tz}(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}\right\}\\
&= \frac{te^{t(0)}}{(0)^2+2(0)+2}-\frac{e^{t(0)}[2(0)+2]}{[(0)^2+2(0)+2]^2}\\
&= \frac{t}{2}-\frac{2}{4}\\
&= \frac{t}{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

❷ $\operatorname*{Res}_{z=-1-i}\dfrac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-1-i}\frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)} &= \lim_{z\to -1-i}\left\{[z-(-1-i)]\frac{e^{tz}}{z^2[z-(-1-i)][z-(-1+i)]}\right\}\\
&= \lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{e^{tz}}{z^2[z-(-1+i)]}\right\}\\
&= \frac{e^{t(-1-i)}}{(-1-i)^2[(-1-i)-(-1+i)]}\\
&= \frac{e^{(-1-i)t}}{(1+2i+i^2)(-2i)}\\
&= \frac{e^{(-1-i)t}}{(2i)(-2i)}\\
&= \frac{e^{(-1-i)t}}{4}
\end{aligned}
$$

❸ $\operatorname*{Res}_{z=-1+i} \dfrac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-1+i} \frac{e^{tz}}{z^2(z^2+2z+2)} &= \lim_{z\to-1+i}\left\{[z-(-1+i)]\frac{e^{tz}}{z^2[z-(-1-i)][z-(-1+i)]}\right\} \\
&= \lim_{z\to-1+i}\left\{\frac{e^{tz}}{z^2[z-(-1-i)]}\right\} \\
&= \frac{e^{t(-1+i)}}{(-1+i)^2[(-1+i)-(-1-i)]} \\
&= \frac{e^{(-1+i)t}}{(1-2i+i^2)(2i)} \\
&= \frac{e^{(-1+i)t}}{(-2i)(2i)} \\
&= \frac{e^{(-1+i)t}}{4}
\end{aligned}
$$