提要 368：殘值定理(Residue Theorem)的應用(6)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第六個應用範例。

範例一
已知 $f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$，試求函數 $f(z)$於所有極點之殘值 $\operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$。

【解答】

只要考慮函數 $f(z)$之分母為零，則本題所示之函數 $f(z)$的三個極點即可求出：

$$z=-1 \text{、} z=2i \text{、} z=-2i$$

其中 $z=-1$ 為二階之極點，$z=2i$ 與 $z=-2i$ 為單極點。本題擬採用以下所示單極點及二階極點的計算公式推求問題之解。

■ 考慮 $z=z_0$ 為單極點時：

利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

■ 考慮 $z=z_0$ 為二階極點時：

利用二階極點之殘值計算公式 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 f(z)\right]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之二階極點。}}$

❶ $\operatorname*{Res}_{z=-1}\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\}\\
&= \lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right\}\\
&= \lim_{z\to-1}\left\{\frac{2z-2}{z^2+4}-\frac{2z(z^2-2z)}{(z^2+4)^2}\right\}\\
&= \frac{2(-1)-2}{(-1)^2+4}-\frac{2(-1)[(-1)^2-2(-1)]}{[(-1)^2+4]^2}\\
&= \frac{-4}{5}-\frac{-6}{25}\\
&= \frac{-20+6}{25}\\
&= -\frac{14}{25}
\end{aligned}
$$

❷ $\operatorname*{Res}_{z=-2i}\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to-2i}\left\{(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} \\
&= \lim_{z\to-2i}\left\{\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)}\right\} \\
&= \frac{(-2i)^2-2(-2i)}{[(-2i)+1]^2[(-2i)-2i]} \\
&= \frac{-4+4i}{(-4-4i+1)(-4i)} \\
&= \frac{-4+4i}{(-3-4i)(-4i)} \\
&= \frac{-4+4i}{12i-16} \\
&= \frac{-1+i}{-4+3i} \\
&= \frac{(-1+i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} \\
&= \frac{4-i+3}{(-4)^2-(3i)^2} \\
&= \frac{7-i}{16-(-9)} \\
&= \frac{7-i}{25}
\end{aligned}
$$

❸ $\operatorname*{Res}_{z=2i}\dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ 的解析

由前面之公式說明知：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} \\
&= \lim_{z\to 2i}\left\{\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)}\right\} \\
&= \frac{(2i)^2-2(2i)}{[(2i)+1]^2[(2i)+2i]} \\
&= \frac{-4-4i}{(-4+4i+1)(4i)} \\
&= \frac{-4-4i}{(-3+4i)(4i)} \\
&= \frac{-4-4i}{-12i-16} \\
&= \frac{-1-i}{-4-3i} \\
&= \frac{(-1-i)(-4+3i)}{(-4-3i)(-4+3i)} \\
&= \frac{4+i+3}{(-4)^2-(3i)^2} \\
&= \frac{7+i}{16-(-9)} \\
&= \frac{7+i}{25}
\end{aligned}
$$