提要 367：殘值定理(Residue Theorem)的應用(5)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第五個應用範例。

範例一
已知 $f(z)=e^{z}\csc^{2}z$，試求 $\operatorname*{Res}_{z=m\pi}f(z)$、$m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$。

【解答】

本題擬採用**勞倫級數(Laurent Series)**展開方法求解，因該解析方法不必事先知道極點之階數。由勞倫級數展開的觀念知，函數 $f(z)$ 需以 $z=m\pi$、$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 為中心點作勞倫級數展開：

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-m\pi)^{m}}+\frac{a_{-m+1}}{(z-m\pi)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-m\pi}+a_{0}+a_{1}(z-m\pi)+\cdots\text{，}m=0,\pm1,\pm2,\cdots \quad (1)$$

■ 若考慮 $m=0$，則原式可對 $z=0$ 作勞倫級數展開如下：

$$\begin{aligned}
f(z)&=e^{z}\csc^{2}z\\
&=\frac{1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^{2}}{2!}+\cdots}{\left(z-\dfrac{z^{3}}{3!}+\dfrac{z^{5}}{5!}-+\cdots\right)^{2}}\\
&=\frac{1+z+\dfrac{z^{2}}{2}+\cdots}{z^{2}-\dfrac{z^{4}}{3}+\dfrac{2z^{6}}{45}-+\cdots}\\
&=\frac{1}{z^{2}}\times\left[1+z+\frac{5}{6}z^{2}+\frac{1}{3}z^{3}+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}z+\cdots
\end{aligned}$$

其中之係數 a_{-1} 為：

$$a_{-1}=1$$

由殘值定理曉得，其中之係數 a_{-1} 即為函數 $f(z)$ 在 $z=0$ 之殘值，故：

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=a_{-1}=1}$$

■ 若考慮 $m=1$，則原式可對 $z=\pi$ 作勞倫級數展開如下：

因為當 $z \to 0$ 時，$\csc z = \csc(z-\pi)$，所以：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^z \csc^2 z \\
&= e^{z-\pi+\pi} \csc^2(z-\pi) \\
&= \frac{e^{\pi} e^{z-\pi}}{\sin^2(z-\pi)} \\
&= \frac{e^{\pi}\left[1+\dfrac{z-\pi}{1!}+\dfrac{(z-\pi)^2}{2!}+\cdots\right]}{\left[(z-\pi)-\dfrac{(z-\pi)^3}{3!}+\dfrac{(z-\pi)^5}{5!}-+\cdots\right]^2} \\
&= \frac{e^{\pi}\left[1+\dfrac{z-\pi}{1!}+\dfrac{(z-\pi)^2}{2!}+\cdots\right]}{(z-\pi)^2-\dfrac{(z-\pi)^4}{3}+\dfrac{2(z-\pi)^6}{45}-+\cdots} \\
&= \frac{e^{\pi}}{(z-\pi)^2}\times\left[1+(z-\pi)+\frac{5}{6}(z-\pi)^2+\frac{1}{3}(z-\pi)^3+\cdots\right] \\
&= \frac{e^{\pi}}{(z-\pi)^2}+\frac{e^{\pi}}{z-\pi}+\frac{5e^{\pi}}{6}+\frac{e^{\pi}}{3}(z-\pi)+\cdots
\end{aligned}
$$

其中之係數 a_{-1} 為：

$$a_{-1} = e^{\pi}$$

由殘值定理曉得，其中之係數 a_{-1} 即為函數 $f(z)$ 在 $z=\pi$ 之殘值，故：

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) = a_{-1} = e^{\pi}}$$

■ 若考慮原式對 $z=m\pi$ 作勞倫級數展開：

因為當 $z\to 0$ 時， $\csc z=\csc(z-m\pi)$ 、 $m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$ ，所以：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=e^{z}\csc^{2}z\\
&=e^{z-m\pi+m\pi}\csc^{2}(z-m\pi)\\
&=\frac{e^{m\pi}e^{z-m\pi}}{\sin^{2}(z-m\pi)}\\
&=\frac{e^{m\pi}\left[1+\dfrac{z-m\pi}{1!}+\dfrac{(z-m\pi)^{2}}{2!}+\cdots\right]}{\left[(z-m\pi)-\dfrac{(z-m\pi)^{3}}{3!}+\dfrac{(z-m\pi)^{5}}{5!}-+\cdots\right]^{2}}\\
&=\frac{e^{m\pi}\left[1+\dfrac{z-m\pi}{1!}+\dfrac{(z-m\pi)^{2}}{2!}+\cdots\right]}{(z-m\pi)^{2}-\dfrac{(z-m\pi)^{4}}{3}+\dfrac{2(z-m\pi)^{6}}{45}-+\cdots}\\
&=\frac{e^{m\pi}}{(z-m\pi)^{2}}\times\left[1+(z-m\pi)+\frac{5}{6}(z-m\pi)^{2}+\frac{1}{3}(z-m\pi)^{3}+\cdots\right]\\
&=\frac{e^{m\pi}}{(z-m\pi)^{2}}+\frac{e^{m\pi}}{z-m\pi}+\frac{5e^{m\pi}}{6}+\frac{e^{m\pi}}{3}(z-m\pi)+\cdots
\end{aligned}
$$

同理可知，當函數 $f(z)$ 對 $z=m\pi$ 作勞倫級數展開時，其中 $1/(z-m\pi)$ 所對應之係數 a_{-1} 為：

$$a_{-1}=e^{m\pi}\ ，\ m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

由殘值定理曉得，其中之係數 a_{-1} 即為函數 $f(z)$ 在 $z=m\pi$ 之殘值，故：

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=m\pi} f(z)=a_{-1}=e^{m\pi}\ ，\ m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots}$$